

**ÜBER DIE VOLLSTÄNDIGKEIT VON QUOTIENTEN
TOPOLOGISCHER GRUPPEN**

Martin Leischner

Über die Vollständigkeit von Quotienten
topologischer Gruppen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Martin Leischner

aus München

eingereicht im März 1986

1. Berichterstatter: Prof. Dr. W. Roelcke

2. Berichterstatter: Priv.-Doz. Dr. H. Pfister

Tag der mündlichen Prüfung: 24. Juli 1986

Inhaltsverzeichnis

Einleitung		III
Kapitel 1	Einführung einer Bedingung für Vollständigkeitsaussagen. Vollständigkeit von Quotienten des Infimums der Links- und Rechtsuniformität einer topologischen Gruppe.	1
Kapitel 2	Vollständigkeit von Quotienten der Rechtsuniformität eines topologischen semidirekten Produkts. Liftbarkeit von Folgen und Netzen.	19
Kapitel 3	Vollständigkeit von Quotienten der Rechtsuniformität einer topologischen Gruppe.	36
Kapitel 4	Vollständigkeit von Quotienten des Supremums der Links- und Rechtsuniformität einer topologischen Gruppe.	57
Verwendete Symbole und Bezeichnungen		65
Literaturverzeichnis		68



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554801_0100

Einleitung

Auf einer topologischen Gruppe X gibt es als natürliche Uniformitäten die Linksuniformität $\mathcal{L}$, die Rechtsuniformität $\mathcal{R}$, sowie das Supremum $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ und das Infimum $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$. Eine topologische Gruppe X heißt vollständig, falls $\mathcal{L}$ oder - äquivalent dazu - $\mathcal{R}$ vollständig ist.

V.A. Geiler und P.S. Kenderov konnten zeigen, daß für jeden fast-metrisierbaren (und damit insbesondere für jeden halbmétrisierbaren oder lokalkompakten) Normalteiler G einer vollständigen topologischen Gruppe X die Faktorgruppe X/G ebenfalls vollständig ist.

Verzichtet man auf die Voraussetzung, daß G Normalteiler ist, so ist die Vollständigkeit der Quotientenuniformität $\mathcal{L}/G$ nicht mehr trivialerweise mit derjenigen von $\mathcal{R}/G$ äquivalent. W. Roelcke und S. Dierolf konnten nun in ihrem Buch 'Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients' (U.S.) über die Vollständigkeit von $\mathcal{L}/G$ befriedigende Aussagen erzielen, indem sie anstatt der Normalteilereigenschaft von G nur eine Verträglichkeit der Äquivalenzrelation $R_G := \{(x, y) \in X \times X: y \in xG\}$ mit $\mathcal{L}$ forderten (Bezeichnung: ' G neutrale Untergruppe von X '). Auf diese Weise konnten u.a. der Satz von Geiler und Kenderov und ein Satz von D. Wigner verallgemeinert werden.

Obgleich nun R_G stets mit $\mathcal{R}$ verträglich ist, blieb bisher insbesondere die Frage offen, ob für jede vollständige topologische Gruppe X mit halbmétrisierbarer Untergruppe G die Quotientenuniformität $\mathcal{R}/G$ ebenfalls vollständig ist.

In der vorliegenden Arbeit sollen nun Quotienten der Rechtsuniformität $\mathcal{R}$ sowie von $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$ und $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ auf Vollständigkeit hin untersucht werden. Als wichtigste Technik wird sich hierbei das Liften von Cauchyfiltern erweisen. Soweit möglich, wird bei der Untersuchung auf die zugrundeliegende uniforme Situation zurückgegangen.

In Kapitel 1 wird eine Bedingung (B) eingeführt, welche in der gesamten Arbeit eine bedeutende Rolle spielen wird. Die Klasse der topologischen Gruppen, die diese Bedingung erfüllen, umfaßt die Klasse der vollständigen inframétrisierbaren (also insbesondere der vollständigen halbmétrisierbaren

und der lokalkompakten) topologischen Gruppen, sowie die Klasse der ASIN-Gruppen (1.2). Des weiteren besitzt die Bedingung (B) bessere Permanenzeigenschaften als 'inframetrisierbar' und 'ASIN'; insbesondere vererbt sie sich auf beliebige Initialbildungen (1.3).

Eine erste Anwendung findet die Bedingung (B) in einer Verallgemeinerung der Aussagen von U.S. über die Vollständigkeit von $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$ bzw. $(\mathcal{L} \wedge \mathcal{R})/G$ (1.13).

In Kapitel 2 wird zunächst eine (Hilfs-)Uniformität $\mathcal{Q}$ eingeführt (2.1) und mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 1 auf Vollständigkeit hin untersucht (2.3). Die hierbei erzielten Resultate lassen sich dann auf topologische semidirekte Produkte aus einem Normalteiler G und einer Untergruppe H anwenden: in Satz 2.5 wird, als Verallgemeinerung von U.S., 11.36, gezeigt, daß sich die Vollständigkeit von G auf den Quotienten $\mathcal{R}/H$ vererbt, wenn H die Bedingung (B) erfüllt.

Im zweiten Teil des Kapitels wird an einer Reihe von Beispielen gezeigt, daß beim Liften von $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolgen pathologische Situationen auftreten können.

Kapitel 3 behandelt nun den allgemeinen Fall einer topologischen Gruppe X . Zuerst wird in mehreren Schritten eine Technik zum Liften von $\mathcal{R}/G$ -Cauchyfiltern entwickelt, wobei die Uniformität $\mathcal{Q}$ aus Kapitel 2 eine wesentliche Rolle spielt. In Satz 3.4 werden die Vollständigkeitsaussagen für $\mathcal{R}/G$ aus U.S., 11.19 und 11.19a, verallgemeinert; insbesondere wird gezeigt, daß sich die Vollständigkeit von X auf $\mathcal{R}/G$ vererbt, sofern X die Bedingung (B) erfüllt und G inframetrisierbar ist.

In Beispiel 3.10 kann dann gezeigt werden, daß der Quotient $\mathcal{R}/D$ einer vollständigen topologischen Gruppe X nach einer diskreten (also insbesondere metrisierbaren) Untergruppe D nicht notwendigerweise vollständig zu sein braucht.

Im letzten Teil des Kapitels schließlich werden für die Untergruppe G topologische direkte Produkte betrachtet. Setzt man voraus, daß die zugrundeliegende topologische Gruppe X Bedingung (B) erfüllt, so lassen sich für die Rechtsuniformität $\mathcal{R}$ Ergebnisse analog zu $\mathcal{L}$ erzielen (3.11 - 3.14).

Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Vollständigkeit des Supremums $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$. Mit Hilfe einer speziellen Liftungstechnik wird gezeigt, daß sich bei einer inframetrisierbaren topologischen Gruppe X mit neutraler Untergruppe G

die Vollständigkeit von $\mathbb{Z} \vee \mathbb{Q}$ auf $\mathbb{Z}/G \vee \mathbb{Q}/G$ vererbt (4.5). Damit wird Satz 11.21 aus U.S. sowie ein Satz von L.G. Brown (s. dazu auch U.S., 13.34) verallgemeinert.

Bei der Verwendung von Zeichen und Symbolen hält sich die Arbeit weitgehend an U.S. Der Übersicht halber sind am Ende zusätzlich die wichtigsten Bezeichnungen aufgeführt.

Für alle im Text zitierten Autoren findet sich im Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit die entsprechende Literaturstelle.

Herrn Professor Dr. W. Roelcke möchte ich an dieser Stelle für die stete Anteilnahme am Fortgang dieser Arbeit und für die wertvollen Anregungen meinen besonderen Dank aussprechen.

1. Kapitel Einführung einer Bedingung für Vollständigkeitsaussagen.

Vollständigkeit von Quotienten des Infimums der Links- und Rechtsuniformität einer topologischen Gruppe.

Sei X eine topologische Gruppe und G eine Untergruppe von X .
 $\mathcal{L}$ bezeichne die Linksuniformität, $\mathcal{R}$ die Rechtsuniformität auf X .
 (Die Mengen $U_{\mathcal{L}} := \{(x, y) \in X \times X : y \in xU\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$ bzw.
 $U_{\mathcal{R}} := \{(x, y) \in X \times X : y \in Ux\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$ bilden eine Nachbarschaftsbasis von $\mathcal{L}$ bzw. $\mathcal{R}$ (s. U.S., 2.1).)

Als Voraussetzung für die Vollständigkeit von $\mathcal{R}/G$ sowie von $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$ bzw. $(\mathcal{L} \wedge \mathcal{R})/G$ werden in U.S. von der zugrundegelegten topologischen Gruppe X die Eigenschaften (ASIN) bzw. 'inframetrisierbar (& vollständig)' gefordert. Im vorliegenden Kapitel wird nun eine Bedingung (B) formuliert, die diese beiden Eigenschaften verallgemeinert und darüber hinaus über bessere Permanenzeigenschaften verfügt. Diese können in Satz 1.13 dazu verwendet werden, die Aussagen aus U.S. über die Vollständigkeit von $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R}$ bzw. $(\mathcal{L} \wedge \mathcal{R})/G$ zu verallgemeinern.

Definition (s. U.S., 9.26)

Eine topologische Gruppe X heißt ASIN-Gruppe, wenn die Bedingung

$$(ASIN) \quad \exists W \in \mathcal{U}_e : \mathcal{L}|_W = \mathcal{R}|_W$$

oder, äquivalent dazu (U.S., 10.17), die Bedingung

$$\exists W \in \mathcal{U}_e \quad \forall U \in \mathcal{U}_e \quad \exists V \in \mathcal{U}_e \quad \forall w \in W : Vw \subset wU$$

erfüllt ist.

Die Bedingung (ASIN) (= almost SIN) stellt eine Abschwächung der Bedingung

$$(SIN) \quad \forall U \in \mathcal{U}_e \quad \exists V \in \mathcal{U}_e \quad \forall x \in X : xVx^{-1} = V \subset U$$

(X besitzt "small invariant neighbourhoods") dar, die äquivalent ist zu
 ' $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ ' (U.S., 2.17).

Beispiele für ASIN-Gruppen sind lokal präkompakte topologische Gruppen, oder topologische Gruppen, welche eine offene SIN-Gruppe enthalten (U.S., 9.27).

Die Eigenschaft (ASIN) vererbt sich auf Untergruppen und auf endliche, aber i.a. nicht auf abzählbare Produkte (U.S., 10.18(a)). Ferner ist jede topologische Gruppe, die eine dichte ASIN-Untergruppe enthält, selbst ASIN-Gruppe, wie sich leicht nachweisen läßt.

Definition (s. U.S., 11.13)

Ein uniformer Raum $(X, \mathcal{W})$ heißt *inframetrisierbar*, falls es eine halbmétrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ gibt, so daß

$$\forall M \in \mathcal{W} \exists N \in \mathcal{W}_0 \forall x \in X \exists E \in \mathcal{W}_0 \text{ endlich: } N(x) \subset M(E).$$

Eine topologische Gruppe X heißt *inframetrisierbar*, falls $(X, \mathcal{L})$ oder, äquivalent dazu (U.S., 11.16), $(X, \mathcal{R})$ inframetrisierbar ist.

Bei Beweisen, in denen die Inframetrisierbarkeit eine Rolle spielt, wird häufig der einfache Sachverhalt ausgenützt, daß jeder $\mathcal{W}_0$ -Cauchyultrafilter ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist.

Halbmétrisierbare oder gleichmäßig lokal präkompakte (s. U.S., 11.6) uniforme Räume sind inframetrisierbar.

Die Inframetrisierbarkeit vererbt sich auf Unterräume, abzählbare Produkte, aber i.a. nicht auf beliebige Produkte ($\mathbb{R}^I$, I überabzählbar, ist beispielsweise nicht mehr inframetrisierbar). Ferner ist ein uniformer Raum inframetrisierbar, wenn er einen dichten inframetrisierbaren Teilraum enthält.

Der Inframetrisierbarkeit verwandt sind die Eigenschaften 'hypometrisierbar' (s. U.S., 11.13; in der Terminologie von V.E. Kholodovskii 'fast metrisierbar' genannt), sowie 'fast metrisierbar' im Sinne von U.S., 13.11.

1.1 Definition

Sei X eine Menge und seien $\mathcal{W}, \mathcal{W}_0$ Uniformitäten auf X .

Man sagt 'das Paar $(\mathcal{W}, \mathcal{W}_0)$ erfüllt die Bedingung (B)', falls

$$(B) \quad \forall M \in \mathcal{W} \exists \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}, \mathcal{W}_0 \text{ halbmétrisierbare Uniformität} \\ \forall \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter } \mathcal{F} \exists N \in \mathcal{W}_0 \forall A \in \mathcal{F} \exists a \in A: N(a) \subset M(a).$$

Man sagt 'eine topologische Gruppe X erfüllt die Bedingung (B)', falls das Paar $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ die Bedingung (B) erfüllt.

Bemerkung

Da die Inversenbildung $(X, \mathcal{L}) \longrightarrow (X, \mathcal{R}), x \mapsto x^{-1}$, eine uniforme Äquivalenz ist, erfüllt $(\mathcal{R}, \mathcal{L})$ genau dann Bedingung (B), wenn $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ Bedingung (B) erfüllt.

Im folgenden wird die Bedingung (B) zu anderen Bedingungen in Beziehung gesetzt.

1.2 Lemma

(a) Sei X eine Menge und seien $\mathcal{W}, \mathcal{W}_0$ Uniformitäten auf X .

Für das Paar $(\mathcal{W}, \mathcal{W}_0)$ betrachte man die Bedingungen

$$(1) \quad \mathcal{W} \subset \mathcal{W}_0,$$

$$(2) \quad \forall M \in \mathcal{W} \exists N \in \mathcal{W}_0 \forall a \in X: N(a) \subset M(a),$$

$$(3) \quad \exists N_0 \in \mathcal{W}_0 \forall M \in \mathcal{W} \forall x \in X \exists N \in \mathcal{W}_0 \forall a \in N_0(x): N(a) \subset M(a),$$

$$(4) \quad \forall M \in \mathcal{W} \exists N_0 \in \mathcal{W}_0 \forall x \in X \exists N \in \mathcal{W}_0 \forall a \in N_0(x): N(a) \subset M(a),$$

$$(B') \quad \forall M \in \mathcal{W} \exists \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}_0, \mathcal{W}_0 \text{ halbmetrisierbare Uniformität}$$

$$\forall \mathcal{W}_0\text{-Cauchyultraf. } \mathcal{F} \exists N \in \mathcal{W}_0 \exists A \in \mathcal{F} \forall a \in A: N(a) \subset M(a),$$

$$(5) \quad \text{Für jeden } \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter } \mathcal{F} \text{ gilt:}$$

$$\forall M \in \mathcal{W} \exists N \in \mathcal{W}_0 \forall A \in \mathcal{F} \exists a \in A: N(a) \subset M(a),$$

$$(6) \quad \text{Jeder } \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter ist ein } \mathcal{W}\text{-Cauchyfilter,}$$

$$(7) \quad \text{Jeder } \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter, zu dem es einen feineren } \mathcal{W}\text{-Cauchyfilter gibt, ist ein } \mathcal{W}\text{-Cauchyfilter,}$$

$$(8) \quad \gamma_{\mathcal{W}} \subset \gamma_{\mathcal{W}_0},$$

sowie die Bedingungen

$$(9) \quad \mathcal{W}_0 \text{ ist inframetrisierbar und jeder } \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter ist ein } \mathcal{W}\text{-Cauchyfilter,}$$

$$(10) \quad \forall M \in \mathcal{W} \exists M_0 \in \mathcal{W}_0 \forall a \in X \exists N \in \mathcal{W}_0: N(M_0(a)) \subset M(a) \\ (\text{vgl. U.S., 9.10}).$$

Es gilt dann folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} & (9) & (10) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ (1) \Longleftrightarrow (2) \implies (3) \implies (4) \implies (B) \Longleftrightarrow (B') \implies (5) \Longleftrightarrow (6) \implies (7) \implies (8). \end{array}$$

(b) Ist X eine topologische Gruppe und $\mathcal{W} := \mathcal{L}$, $\mathcal{W} := \mathcal{R}$, so gilt

$$(1) \iff (SIN) \quad (U.S., 2.17),$$

$$(3) \iff (ASIN),$$

$$(4) \iff (4') \quad \forall U \in \mathcal{U}_e \exists W \in \mathcal{U}_e \\ \forall x \in X \exists V \in \mathcal{U}_e \forall w \in W: x^{-1}w^{-1}Vwx \subset U,$$

$$(6) \iff X \text{ besitzt eine Gruppenvervollständigung} \\ (U.S., 10.23 \text{ (und 9.24)}),$$

$$(9) \iff X \text{ ist inframetrisierbar und besitzt eine Gruppenver-} \\ \text{vollständigung},$$

$$(10) \text{ ist stets erfüllt (U.S., 9.20)},$$

und man erhält das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{c} \text{infram. \& Gruppenvervollst.} \\ \Downarrow \\ (SIN) \implies (ASIN) \implies (4') \implies (B) \implies \text{Gruppenvervollst.} \end{array}$$

Beweis

(a): Die Richtungen $(1) \iff (2) \implies (3) \implies (4) \implies (B) \implies (5)$,

$(B') \implies (B)$ und $(6) \implies (7) \implies (8)$ sind klar bzw. mühelos einzusehen.

$(10) \implies (7)$ findet sich in U.S., 10.5(a).

$(B) \implies (B')$: Sei $M \in \mathcal{W}$ gegeben. Wähle zu M eine halbmétrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ gemäß (B). Sei nun $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}_0$ -Cauchy-ultrafilter. Nach (B) existiert $N \in \mathcal{W}$ mit

$$\forall A \in \mathcal{F} \exists a \in A: N(a) \subset M(a). \text{ Somit gilt für}$$

$$B := \{x \in X: N(x) \subset M(x)\}, \text{ daß } B \cap A \neq \emptyset \quad (A \in \mathcal{F}).$$

Da $\mathcal{F}$ Ultrafilter ist, folgt daraus $B \in \mathcal{F}$.

$(5) \implies (6)$: Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter und sei $M \in \mathcal{W}$ gegeben. Wähle zu $\mathcal{F}$ und M gemäß (5) eine Nachbarschaft $N \in \mathcal{W}$. Da $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist, existiert $A \in \mathcal{F}$ mit $A \subset N(x) \quad (x \in A)$. Aufgrund der Wahl von N gibt es $a \in A$ mit $N(a) \subset M(a)$, und man erhält $A \subset M(a)$. Damit ist gezeigt, daß $\mathcal{F}$ auch ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist.

$(6) \implies (5)$: Sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter. Wegen (6) ist der zu $\mathcal{F}$ gehörige minimale $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\{N(A): N \in \mathcal{W}, A \in \mathcal{F}\}$ (s. U.S., 10.2) ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter. Somit gibt es für $M \in \mathcal{W}$ eine Nachbarschaft $N \in \mathcal{W}$ sowie $A \in \mathcal{F}$, so daß $N(A) \subset M(a) \quad (a \in A)$.

(9) $\Rightarrow$ (B): Wähle eine halbmetrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$, bzgl. welcher $\mathcal{W}$ inframetrisierbar ist. Sei $M \in \mathcal{W}$ gegeben, und sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter auf X und $\hat{\mathcal{F}} \supset \mathcal{F}$ ein Ultrafilter. Da $\hat{\mathcal{F}}$ dann ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist (s. hinter Def. von 'inframetrifizierbar', Seite 2), und da nach Voraussetzung Bedingung (6) und somit auch (5) erfüllt ist, gibt es $N \in \mathcal{W}$ mit $\forall A \in \hat{\mathcal{F}} \exists a \in A: N(a) \subset M(a)$. Wegen $\mathcal{F} \subset \hat{\mathcal{F}}$ ist damit Bedingung (B) erfüllt.

(b): Die nicht mit einem Zitat (=Begründung) versehenen Äquivalenzen sind trivial bzw. einfache Folgerungen.

Bemerkung

Daß sich keine der Implikationen in (a) und (b) umkehren läßt, zeigen die nun folgenden Beispiele:

(ASIN) $\not\Rightarrow$ (SIN) (vgl. U.S., 2.13):

Durch $X := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \right\}$, versehen mit der üblichen Topologie, wird eine metrisierbare topologische Gruppe definiert, die lokalkompakt und damit eine vollständige ASIN-Gruppe ist (U.S., 8.8, 9.27). X ist jedoch keine SIN-Gruppe, denn wegen $\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon > 0)$ gilt

$$(i) \quad \forall v \in \mathcal{U}_e(X): \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \bigcup_{x \in X} x^{-1} v x.$$

(4') $\Rightarrow$ (ASIN) (vgl. U.S., 10.18 (a)):

$Y := X^{\mathbb{Z}}$ (X wie oben) mit der Produkttopologie ist eine vollständige und metrisierbare topologische Gruppe, die als Produkt von ASIN- (und damit (4')-) Gruppen die Bedingung (4') erfüllt (1.3 Bemerkung (a)). Definiert man für $n \in \mathbb{N}$

$$y_n := \left(\begin{pmatrix} 1 & \delta_{i,n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)_{i \in \mathbb{Z}} \in Y \setminus \{e_Y\} \quad (\text{wobei } \delta_{i,n} \text{ das Kroneckersymbol bezeichnet}), \text{ so gilt wegen (i):}$$

$$(ii) \quad \forall w \in \mathcal{U}_e(Y) \exists n \in \mathbb{N} \forall v \in \mathcal{U}_e(Y): y_n \in \bigcup_{w \in w} w^{-1} v w;$$

also ist Y keine ASIN-Gruppe.

metrisierbar & vollständig $\Rightarrow$ (4') :

Sei $\sigma: \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Aut}(Y)$, $m \mapsto \sigma_m$, (Y wie oben) definiert durch $\sigma_m((x_n)_{n \in \mathbb{Z}}) := (x_{n-m})_{n \in \mathbb{Z}}$. Da σ ein Homomorphismus und σ_m ($m \in \mathbb{Z}$) stetig ist, wird durch $Z := Y \times_{\sigma}^{\text{top}} \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie versehen) ein topologisches semidirektes Produkt definiert (zur Definition des topologischen semidirekten Produkts s. U.S., 6.10 ff.), welches vollständig (U.S., 12.5 (a)) und metrisierbar ist.

Die Bedingung (4') ist nicht erfüllt:

Sei $W \in \mathcal{U}_e(Y)$ gegeben. Man wähle $n \in \mathbb{N}$ gemäß (ii) und definiere $z := (e_y, n) \in Z$. Für jedes $V \in \mathcal{U}_e(Y)$ gilt dann

$$(y_0, 0) = z^{-1} (y_n, 0) z \stackrel{(ii)}{\in} z^{-1} \left(\bigcup_{w \in W} (w, 0)^{-1} (V \times \{0\}) (w, 0) \right) z.$$

vollständig $\Rightarrow$ (B) : s. 2.5 Bemerkung (b).

(SIN) $\Rightarrow$ inframetrisierbar : $\mathbb{R}^I$, I überabzählbar.

(10) $\Rightarrow$ (6) :

Nicht jede topologische Gruppe besitzt eine Gruppenvervollständigung (U.S., 10.18 (a)).

(9) $\Rightarrow$ (10) : s. U.S., Bemerkung hinter 10.5.

(8) $\Rightarrow$ (7) :

Sei $\mathcal{W}$ die übliche Uniformität auf $] -1, 1[$ und $\mathcal{W}_0$ die Initialuniformität auf $] -1, 1[$ bzgl. der Abbildung

$$] -1, 1[\longrightarrow \mathbb{C}, t \longmapsto e^{i\pi t}, \quad (\mathbb{C} \text{ mit der üblichen Uniformität}).$$

Dann gilt $\mathcal{F}_{\mathcal{W}} = \mathcal{F}_{\mathcal{W}_0}$, aber an der Folge $(-1)^n (1 - \frac{1}{n})$ ($n \in \mathbb{N}$) läßt sich erkennen, daß (7) nicht erfüllt ist.

Im folgenden Abschnitt wird das Permanenzverhalten der Bedingung (B) untersucht.

1.3 Proposition

Für $i \in I$ (I Indexmenge) sei X_i eine Menge; $\mathcal{W}_i$, $\mathcal{W}_i^0$ seien Uniformitäten auf X_i , so daß $(\mathcal{W}_i, \mathcal{W}_i^0)$ die Bedingung (B) erfüllt.

Sei X eine Menge, $f_i: X \longrightarrow X_i$ ($i \in I$) Abbildungen, und $\mathcal{W}$ bzw. $\mathcal{W}^0$ die zu $f_i: X \longrightarrow (X_i, \mathcal{W}_i)$ bzw. $f_i: X \longrightarrow (X_i, \mathcal{W}_i^0)$ ($i \in I$) gehörige Initialuniformität. Dann erfüllt auch das Paar $(\mathcal{W}, \mathcal{W}^0)$ die Bedingung (B).

Beweis

Der Beweis wird für die Bedingung (B') durchgeführt, die äquivalent zu Bedingung (B) ist (s. Lemma 1.2 (a)).

Gegeben sei o.E. $M := \bigcap_{i \in E} (\widehat{f_i^{-1} \times f_i})(M_i) \in \mathcal{W}$ mit $E \subset I$ endlich und $M_i \in \mathcal{W}_i$ ($i \in E$) (s. U.S., 0.16). Für $i \in E$ wähle man zu M_i gemäß (B') eine halbmétrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_i' \subset \mathcal{W}_i$ auf X_i mit

$$(1) \quad \forall \mathcal{W}_i'\text{-Cauchyultraf. } \mathcal{G} \exists N_i \in \mathcal{W}_i' \exists B \in \mathcal{G} \forall b \in B: N_i(b) \subset M_i(b) .$$

$\mathcal{W}_0$ bezeichne die Initialuniformität auf X bzgl. der Abbildungen $f_i: X \longrightarrow (X_i, \mathcal{W}_i')$ ($i \in E$). Dann ist $\mathcal{W}_0$ eine halbmétrisierbare Uniformität auf X , die gröber als $\mathcal{W}$ ist.

Sei nun $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{W}_0$ -Cauchyultrafilter auf X . Da für $i \in E$ die Menge $f_i(\mathcal{G})$ eine Filterbasis eines $\mathcal{W}_i'$ -Cauchyultrafilters $\mathcal{G}_i$ auf X_i ist, gibt es gemäß (1) $N_i \in \mathcal{W}_i'$ und $A_i \in \mathcal{G}_i$ ($i \in E$) mit

$$(2) \quad \forall a \in A_i: N_i(f_i(a)) \subset M_i(f_i(a)) .$$

Definiert man nun $N := \bigcap_{i \in E} (\widehat{f_i^{-1} \times f_i})(N_i) \in \mathcal{W}$ und $A := \bigcap_{i \in E} A_i \in \mathcal{G}$,

so gilt für $a \in A$:

$$\begin{aligned} N(a) &= \bigcap_{i \in E} (((\widehat{f_i^{-1} \times f_i})(N_i))(a)) = \bigcap_{i \in E} \widehat{f_i^{-1}}(N_i(f_i(a))) \subset \\ &\stackrel{(2)}{\subset} \bigcap_{i \in E} \widehat{f_i^{-1}}(M_i(f_i(a))) = M(a) . \end{aligned}$$

Bemerkungen

(a) Außer der Bedingung (3) ($\hat{=}$ (ASIN) bei top. Gr.) und (9) ($\hat{=}$ inframétrisierbar & Gruppenvervollst.) übertragen sich alle Bedingungen aus Lemma 1.2 auf beliebige Initialbildungen. (Beweis für (1), (2): klar; für (4) und (10): Nachrechnen mit Hilfe von Basisdarstellungen der Initialuniformitäten $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}$; für (5), (6), (7): U.S., 0.37; für (8): U.S., 0.17.)

(b) In Verbindung mit Lemma 1.2 (und U.S., 3.24, 3.35) folgt, daß jede topologische Gruppe X , die sich in ein Produkt von vollständigen inframétrisierbaren topologischen Gruppen einbetten läßt (d.h. die topologisch isomorph zu einer Untergruppe eines Produkts von vollständigen

digen inframetrisierbaren topologischen Gruppen ist), Bedingung (B) erfüllt. Eine Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch i.a. nicht:

In Beispiel 1.5 wird eine ASIN-Gruppe konstruiert, die sich nicht einmal in ein Produkt von inframetrisierbaren topologischen Gruppen einbetten läßt.

Ersetzt man nun aber in Bedingung (B) den Ausdruck ' $\exists N \in \mathbb{N}$ ' durch ' $\exists N \in \mathbb{N}_0$ ', so erhält man eine Verschärfung, die, übertragen auf den Fall der topologischen Gruppen ($\mathcal{W} := \mathbb{Z}$, $\mathbb{W} := \mathbb{Q}$), die Bedingung

$$(*) \quad \forall U \in \mathcal{U}_e \quad \exists (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{U}_e \quad \forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N}: \quad x^{-1}V_n x \subset U$$

impliziert. Bedingung (*) wiederum ist nach G.I. Kac gleichbedeutend damit, daß sich X in ein Produkt halbmétrisierbarer topologischer Gruppen einbetten läßt.

Das folgende Lemma wird für Beispiel 1.5 benötigt.

1.4 Lemma

Jede topologische Gruppe $(X, \mathcal{T})$, die sich in ein Produkt von inframetrisierbaren topologischen Gruppen einbetten läßt, erfüllt die Bedingung

$$(1) \quad \forall U \in \mathcal{U}_e \quad \exists (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Folge in } \mathcal{U}_e \quad \forall x \in X \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists E \subset X \text{ endlich: } xV_n x^{-1} \subset EU.$$

Bemerkung

Die Frage, inwieweit eine Umkehrung dieser Aussage gilt, bleibt hier unbeantwortet (vgl. Satz von G.I. Kac).

Beweis

Sei $U \in \mathcal{U}_e(X)$ gegeben. Da sich nach Voraussetzung X in ein Produkt inframetrisierbarer topologischer Gruppen einbetten läßt und sich die Inframetrisierbarkeit (insbesondere) auf endliche Produkte sowie auf Unterräume vererbt (U.S., 11.13), folgt, daß es auf X eine inframetrisierbare Gruppentopologie $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$ mit $U \in \mathcal{U}_e(X, \mathcal{T})$ gibt. Gemäß U.S., 11.16, kann man eine Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_e(X, \mathcal{T})$ wählen mit

$$(2) \quad \forall V \in \mathcal{U}_e(X, \mathcal{T}) \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists F \subset X, F \text{ endlich: } V_n \subset FV.$$

Sei nun $x \in X$ gegeben. Wähle $V \in \mathcal{U}_e(X, \mathcal{T})$ mit

$$(3) \quad xVx^{-1} \subset U.$$

Nach (2) gibt es $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche Menge $F \subset X$ mit

$$(4) \quad V_n \subset FV.$$

Definiert man nun $E := xFx^{-1}$, so erhält man damit eine endliche Teilmenge von X , so daß gilt:

$$xV_nx^{-1} \stackrel{(4)}{\subset} xFVx^{-1} = xFx^{-1}xV_nx^{-1} \stackrel{(4)}{\subset} EU.$$

1.5 Beispiel

Es wird eine ASIN-Gruppe Y konstruiert, die sich nicht in ein Produkt von inframetrisierbaren topologischen Gruppen einbetten läßt.

(vgl. 1.3 Bem.(b)).

Bemerkung

Jede SIN-Gruppe läßt sich in ein Produkt von halbmétrisierbaren SIN-Gruppen einbetten (U.S., 7.14).

Konstruktion

Zunächst wird eine ASIN-Gruppe X konstruiert, die eine e -Umgebung U besitzt, so daß die Bedingung

$$(1) \quad \forall V \in \mathcal{U}_e(X) \quad \exists x \in X \quad \forall E \subset X, E \text{ endlich: } xVx^{-1} \not\subset EU$$

erfüllt ist (damit ist X insbesondere keine SIN-Gruppe):

$\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie und $G := \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ mit der Produkttopologie sind topologische Gruppen; die Mengen

$$V_n := \{(k_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G : k_i = 0 \text{ für } -n \leq i \leq n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bilden eine σ -Umgebungsbasis von G . Die Abbildung

$$\sigma: \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Aut}(G), \quad m \longmapsto \sigma_m, \quad \text{mit } \sigma_m((k_i)_{i \in \mathbb{Z}}) := (k_{i-m})_{i \in \mathbb{Z}} \quad ((k_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G),$$

ist ein Monomorphismus. Da für $m \in \mathbb{Z}$ der Automorphismus σ_m stetig

ist, wird durch $X := G \overset{\text{top}}{\times} \mathbb{Z}$ ein (äußeres) topologisches semidirektes Produkt definiert.

Nun soll gezeigt werden, daß für $U := V_0 \times \{0\} \in \mathcal{U}_e(X)$ die folgende, zu (1) äquivalente Bedingung gilt:

$$(2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x \in X \quad \forall E \subset X, E \text{ endlich: } x(V_n \times \{0\})x^{-1} \not\subset UE.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Für $x := (\sigma, n+1)$ erhält man

$$x(V_n \times \{0\})x^{-1} = \{(k_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in G : k_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq 2n+1\} \times \{0\}.$$

Definiert man $p_0: X \longrightarrow \mathbb{Z}$, $((k_i)_{i \in \mathbb{Z}}, n) \longmapsto k_0$, so folgt

$$(3) \quad p_0(x(V_n \times \{0\})x^{-1}) = \mathbb{Z}.$$

Ist nun E eine endliche Teilmenge von X , so ist, wie sich leicht nachrechnen läßt, auch die Menge $p_0(UE)$ endlich. Daraus folgt zusammen mit (3), daß $x(V_n \times \{0\})x^{-1} \not\subset UE$.

$Y := X^{\mathbb{N}}$, versehen mit der Boxtopologie, ist eine topologische Gruppe (U.S., 3.36(a)), die die Bedingung (ASIN) erfüllt (X ist ASIN-Gruppe).

Annahme: Y läßt sich in ein Produkt inframetrisierbarer topologischer Gruppen einbetten.

Nach Lemma 1.4 gibt es zu $U^{\mathbb{N}} (\in \mathcal{U}_e(Y))$ Umgebungen $V_{n,i} \in \mathcal{U}_e(X)$ ($n, i \in \mathbb{N}$) mit

$$(4) \quad \forall y \in Y \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists F \subset Y, F \text{ endlich: } y(\prod_{i \in \mathbb{N}} V_{n,i})y^{-1} \subset F(U^{\mathbb{N}}).$$

Wegen (1) kann man $x_i \in X$ ($i \in \mathbb{N}$) so wählen, daß

$$(5) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \forall E \subset X, E \text{ endlich: } x_i V_{i,i} x_i^{-1} \not\subset EU.$$

Für $y := (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in Y$ gibt es nun nach (4) ein Element $n \in \mathbb{N}$ und eine endliche Teilmenge F von Y mit $y(\prod_{i \in \mathbb{N}} V_{n,i})y^{-1} \subset F(U^{\mathbb{N}})$; daraus folgt $x_n V_{n,n} x_n^{-1} \subset \text{pr}_n(F)U$.

Da mit F auch die Projektion $\text{pr}_n(F) \subset X$ endlich ist, erhält man einen Widerspruch zu (5).

1.6 Proposition

Ist Y eine topologische Gruppe und X eine dichte Untergruppe von Y , so gilt:

Y erfüllt (genau dann) Bedingung (B), wenn X Bedingung (B) erfüllt.

Beweis

Sei $U \in \mathcal{U}_e(Y)$ gegeben. Da X Bedingung (B) erfüllt, gibt es zu $U \cap X$ eine halbmétrisierbare Uniformität $\mathcal{R}'_X \subset \mathcal{R}_X$ auf X mit

$$(1) \quad \forall \mathcal{R}'_X\text{-Cauchyfilter } \mathcal{F} \quad \exists v \in \mathcal{U}_e(Y) \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad \exists a \in A: (v \cap X)a \subset a(U \cap X).$$

Die Menge $\{\bar{N}^{Y \times Y}: N \in \mathcal{R}'_X\}$ bildet eine Basis einer halbmétrisierbaren

Uniformität $\mathcal{R}'_Y \subset \mathcal{R}_Y$ auf Y mit $\mathcal{R}'_Y|_X = \mathcal{R}'_X$.

Sei $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{R}'_Y$ -Cauchyfilter auf Y . Zum Beweis der Behauptung genügt es

nun zu zeigen, daß

$$(2) \quad \exists w \in \mathcal{U}_e(Y) \quad \forall B \in \mathcal{G} \quad \exists b \in B: w b \subset b \bar{U}^Y.$$

Der von $\mathcal{U}_e(Y)\mathcal{G}$ erzeugte Filter ist ein $\mathcal{R}'_Y$ -Cauchyfilter auf Y , da er feiner als der zu $\mathcal{G}$ gehörige minimale $\mathcal{R}'_Y$ -Cauchyfilter (s. U.S., 10.2) ist. Weil X dicht in Y ist, existiert der $\mathcal{R}'_X$ -Cauchyfilter

$\mathcal{F} := \langle \mathcal{U}_e(Y)\mathcal{G} \rangle | X$. Wähle nun zu $\mathcal{F}$ eine Umgebung $V \in \mathcal{U}_e(Y)$ gemäß (1); V kann hierbei offen gewählt werden. Zu V gibt es $w \in \mathcal{U}_e(Y)$ mit

$$(3) \quad w^2 w^{-1} \subset V.$$

Sei nun $B \in \mathcal{G}$ gegeben. Da V zu $\mathcal{F}$ gemäß (1) gewählt ist und $wB \cap X \in \mathcal{F}$, existiert $a \in wB$ mit $(V \cap X)a \subset a(U \cap X)$.

Weil X dicht in Y liegt und V offen ist, folgt

$$(4) \quad \bar{V}^Y a = (\overline{V \cap X})^Y a \subset a(\overline{U \cap X})^Y \subset a \bar{U}^Y.$$

Wähle nun $b \in B$ und $w \in W$ mit $a = wb$. Dann gilt

$$wb = w^{-1} w w^{-1} a \stackrel{(1)}{\subset} w^{-1} V a \stackrel{(4)}{\subset} w^{-1} a \bar{U}^Y = b \bar{U}^Y,$$

und damit ist (2) bewiesen.

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen werden gewisse Bedingungen für die Verträglichkeit von zwei Uniformitäten bzw. von einer Äquivalenzrelation mit einer Uniformität vorausgesetzt; diese Verträglichkeitsbedingungen werden im folgenden eingeführt.

1.7 Definition/Bemerkung

Sei X eine Menge und $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ Uniformitäten auf X .

In U.S., 2.3, wird gezeigt, daß die Verträglichkeitsbedingung

$$(VB1) \quad \forall M \in \mathcal{W} \quad \forall N \in \mathcal{W}' \quad \exists M' \in \mathcal{W} \quad \exists N' \in \mathcal{W}': N' \circ M' \subset M \circ N$$

äquivalent dazu ist, daß die Menge $\{M \circ N : M \in \mathcal{W}, N \in \mathcal{W}'\}$ eine Basis von $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}'$ bildet.

Im vorliegenden Kapitel nun wird für das Paar $(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ eine etwas stärkere Bedingung benötigt:

(VB2) Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{W}$, so daß

$$\forall N \in \mathcal{W}' \quad \exists P \in \mathcal{B} \quad \forall M \in \mathcal{B}: P \circ M \subset M \circ N.$$

Sei nun R eine Äquivalenzrelation auf X und $\mathcal{Z}_R$ die von R auf X erzeugte Uniformität (d.h. die Uniformität, die $\{R\}$ als Basis hat). In dieser Situation sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) $(\mathcal{Z}_R, \mathcal{W})$ erfüllt (VB1),
- (ii) $(\mathcal{Z}_R, \mathcal{W})$ erfüllt (VB2),
- (iii) $\forall M \in \mathcal{W} \exists N \in \mathcal{W} : N \circ R \subset R \circ M$.

Gilt eine dieser Aussagen, so sagt man ' R ist mit $\mathcal{W}$ verträglich'; die Mengen $(q \times q)(M)$ ($M \in \mathcal{W}$) bilden dann eine Basis von $\mathcal{W}/R$ (U.S., 4.10).

Sei nun X eine topologische Gruppe und G eine Untergruppe von X . Dann ist die von G erzeugte Äquivalenzrelation $R_G := \{(x, y) \in X \times X : y \in xG\}$ stets mit der Rechtsuniformität $\mathcal{R}$ auf X verträglich (U.S., 5.21). Die Verträglichkeit von R_G mit der Linksuniformität $\mathcal{L}$ ist äquivalent zu

$$\forall U \in \mathcal{U}_e \exists V \in \mathcal{U}_e : V G \subset G U \quad (\text{U.S., 5.28}).$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so heißt G neutrale Untergruppe von X (Bezeichnung: $G \leq_n X$).

1.8 Lemma

Sei X eine topologische Gruppe und G eine Untergruppe von X . Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}_1$ von $\mathcal{L}/G$ und eine Basis $\mathcal{B}_2$ von $\mathcal{R}/G$ mit

$$\forall M \in \mathcal{B}_1 \forall N \in \mathcal{B}_2 : N \circ M = M \circ N.$$

Insbesondere erfüllen die Paare $(\mathcal{L}/G, \mathcal{R}/G)$ und $(\mathcal{R}/G, \mathcal{L}/G)$ die Verträglichkeitsbedingung (VB2).

Beweis

Nach U.S., 4.17, besitzt $\mathcal{L}/G$ eine linksinvariante Basis $\mathcal{B}_1$, d.h. eine Basis, für die gilt:

$$\forall M \in \mathcal{B}_1 \forall x \in X : \{(s, t) \in M \implies (x.s, x.t) \in M\}$$

(wobei $\cdot$ die kanonische Operation (von links) $X \times (X/G) \longrightarrow X/G$, $(x, q(y)) \longmapsto q(xy)$, bezeichnet (vgl. U.S., Remark nach 5.7)).

Die Mengen $U \mathcal{R}/G := \{(s, t) \in (X/G) \times (X/G) : t \in U.s\}$ ($U \in \mathcal{U}_e$) bilden nach U.S., 5.21, eine Basis $\mathcal{B}_2$ von $\mathcal{R}/G$.

Für $M \in \mathcal{B}_1$, $U \in \mathcal{U}_e$ und $t \in X/G$ gilt:

$$(U_{\mathcal{R}/G} \circ M)(t) = U.M(t) = M(U.t) = (M \circ U_{\mathcal{R}/G})(t).$$

1.9 Lemma

Sei X eine Menge und $\mathcal{W}, \mathcal{W}$ Uniformitäten auf X , so daß $\mathcal{W}$ halbmetrisierbar ist. Es existiere eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{W}$ mit

$$(1) \quad \forall M' \in \mathcal{B} \quad \forall N \in \mathcal{W} \quad \exists P \in \mathcal{W}: P \circ M' \subset M' \circ N$$

(dies ist insbesondere dann erfüllt, wenn $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ der Verträglichkeitsbedingung (VB2) genügt).

Sei $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}$ -Cauchyfilter auf X und $M \in \mathcal{W}$.

Dann existiert ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X mit $M(\mathcal{G}) \subset \mathcal{f}$.

Ist zusätzlich $M_1 \in \mathcal{B}$, $N_1 \in \mathcal{W}$ und $x_1 \in X$ gegeben mit

- $M_1^2 \subset M_1^{-1}$,
- $M_1 \circ N_1(x_1) \in \mathcal{G}$,

so läßt sich $N_1^2(x_1) \in \mathcal{f}$ erreichen.

Beweis

O.E. kann angenommen werden, daß M_1 , N_1 und x_1 wie im zweiten Teil des Lemmas gegeben sind (Die Menge $\{M \circ N : M \in \mathcal{W}, N \in \mathcal{W}\}$ ist eine Basis von $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}$, s. 1.7). Für $n \geq 2$ wähle man $M_n \in \mathcal{B}$ und $N_n \in \mathcal{W}$ so, daß

$$(2) \quad M_{n+1}^2 \subset M_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und}$$

$$(3) \quad N_{n+1}^2 \subset N_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

gilt und die Menge $\{N_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{W}$ bildet ($\mathcal{W}$ ist halbmetrisierbar).

Man definiere nun $P_1 := N_1$ und wähle für $n \geq 2$ mit Hilfe von (1) $P_n \in \mathcal{W}$, so daß

$$(4) \quad P_n \circ M_{n-1} \circ \dots \circ M_1 \subset M_{n-1} \circ \dots \circ M_1 \circ N_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

(wobei $M_0 \circ \dots \circ M_1 := \Delta_X$). Wegen $M_1 \circ N_1(x_1) \in \mathcal{G}$ und da $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist, gibt es eine abfallende Folge $A_n \in \mathcal{G}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit

$$(5) \quad A_1 \subset M_1 \circ P_1(x_1) \quad \text{und} \quad A_n \times A_n \subset M_n \circ P_n \quad (n \geq 2).$$

Man definiere nun $a_1 := x_1$ und wähle für jedes $n \geq 2$ ein beliebiges $a_n \in A_n$. Es läßt sich nun induktiv eine Folge $x_n \in X$ ($n \geq 2$) mit

$$(6) \quad x_{n+1} \in N_n(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{und}$$

$$(7) \quad a_{n+1} \in M_n \circ \dots \circ M_1(x_{n+1}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

konstruieren:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n$ schon geeignet gewählt. Da

$$a_{n+1} \stackrel{(5)}{\in} M_n \circ P_n(a_n) \stackrel{1,4}{\subseteq} M_n \circ P_n \circ M_{n-1} \circ \dots \circ M_1(x_n) \stackrel{(4)}{\subseteq} M_n \circ M_{n-1} \circ \dots \circ M_1 \circ N_n(x_n),$$

gibt es $x_{n+1} \in N_n(x_n)$ mit $a_{n+1} \in M_n \circ \dots \circ M_1(x_{n+1})$.

Die Menge $\mathcal{F} := \{N_n^2(x_n) \cap M(A) : n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{G}\}$ ist eine Filterbasis auf

X , denn für $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{G}$ gilt

$$- \quad N_{n+1}^2(x_{n+1}) \stackrel{(4)}{\subseteq} N_n^2(x_n),$$

$$- \quad M^{-1}(N_n^2(x_n)) \stackrel{(2)}{\supseteq} M_n \circ \dots \circ M_1 \circ N_n(x_n) \stackrel{(4)}{\supseteq} M_n \circ P_n \circ M_{n-1} \circ \dots \circ M_1(x_n) \supseteq \\ \stackrel{(7)}{\supseteq} M_n \circ P_n(a_n) \stackrel{(5)}{\supseteq} A_n, \text{ und damit}$$

$$N_n^2(x_n) \cap M(A) \neq \emptyset.$$

Für den von $\mathcal{F}$ erzeugten Filter $\mathcal{f}$ gilt offensichtlich $N_1^2(x_1) \in \mathcal{f}$ und $M(\mathcal{G}) \subset \mathcal{f}$. Da $\{N_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Basis von $\mathcal{W}$ darstellt, ist $\mathcal{f}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter.

Aus Lemma 1.9 läßt sich nun ein Liftungssatz für halbmétrisierbare uniforme Räume herleiten.

1.10 Korollar (vgl. U.S., 11.2)

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein halbmétrisierbarer uniformer Raum und R eine mit $\mathcal{W}$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X . $q: X \longrightarrow X/R$ bezeichne die Quotientenabbildung.

Dann gibt es zu jedem $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X/R einen $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X mit $\mathcal{F} \subset q(\mathcal{f})$.

Ist zusätzlich $N_1 \in \mathcal{W}$ und $x_1 \in X$ gegeben mit $q(N_1(x_1)) \in \mathcal{F}$, so läßt sich $N_1^2(x_1) \in \mathcal{f}$ erreichen.

Beweis

Sei $\mathcal{J}_R$ die von R erzeugte Uniformität auf X . Weil $\mathcal{J}_R \wedge \mathcal{W}$ die Initialuniformität bzgl. der Quotientenabbildung $q: X \longrightarrow (X/R, \mathcal{W}/R)$ ist (U.S., chap. 4, exercise 6), ist der von $\mathcal{J}_R^{-1}(\mathcal{F})$ erzeugte Filter $\mathcal{G}$ auf X ein $\mathcal{J}_R \wedge \mathcal{W}$ -Cauchyfilter. Da R mit $\mathcal{W}$ verträglich ist, erfüllt das

Paar $(\mathcal{J}_R, \mathcal{W})$ die Verträglichkeitsbedingung (VB2). Wendet man nun Lemma 1.9 (mit $\mathcal{W} = \mathcal{J}_R$, $M = R$ und $M_1 = R$) auf $\mathcal{G}$ an, so folgt die Behauptung.

1.11 Proposition

Sei X eine Menge und $\mathcal{W}, \mathcal{W}_0, \mathcal{V}$ Uniformitäten auf X , so daß $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ die Verträglichkeitsbedingung (VB2) (s. 1.7) erfüllt.

Dann gilt:

- (a) Erfüllt $(\mathcal{W}, \mathcal{W}_0)$ Bedingung (B), so erfüllt auch $(\mathcal{W} \wedge \mathcal{V}, \mathcal{W} \wedge \mathcal{V})$ Bedingung (B).
- (b) Gibt es $N_0 \in \mathcal{W}_0$, so daß für jedes $x \in X$ das Paar $(\mathcal{W}|_{N_0(x)}, \mathcal{W}_0|_{N_0(x)})$ Bedingung (B) erfüllt, so ist jeder $\mathcal{W} \wedge \mathcal{V}$ -Cauchyfilter ein $\mathcal{W} \wedge \mathcal{V}$ -Cauchyfilter.

Bemerkung

Ersetzt man in der Proposition $\mathcal{V}$ durch $\mathcal{W}$, so folgt im Fall (a), daß $(\mathcal{W}, \mathcal{W} \wedge \mathcal{W})$ Bedingung (B) erfüllt, bzw. im Fall (b) (die schwächere Aussage), daß jeder $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}$ -Cauchyfilter ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist; insbesondere folgt also, daß $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}$ vollständig ist, falls $\mathcal{W}$ vollständig ist.

Beweis

(a) und (b) werden gemeinsam bewiesen. Im Fall (b) wird gezeigt, daß für $(\mathcal{W} \wedge \mathcal{V}, \mathcal{W} \wedge \mathcal{V})$ Bedingung (5) aus Lemma 1.2 erfüllt ist; hierzu sei ein beliebiger $\mathcal{W} \wedge \mathcal{V}$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ vorgegeben.

Sei $M^* \in \mathcal{W} \wedge \mathcal{V}$ gegeben. Wähle $M \in \mathcal{W}$ und $P \in \mathcal{V}$ mit

$$(1) \quad P^3 \circ M \circ (P^2)^{-1} \subset M^*$$

und

$$(2) \quad \forall N \in \mathcal{W}_0 \quad \exists N' \in \mathcal{W}_0 : N' \circ P \subset P \circ N \quad ((\mathcal{V}, \mathcal{W}) \text{ erfüllt (VB2)}).$$

Voraussetzungsgemäß gibt es $N_0 \in \mathcal{W}_0$ - wobei im Fall (a) $N_0 := X \times X$ definiert werden kann -, so daß für $x \in X$ gilt:

$$(3) \quad (\mathcal{W}|_{N_0^3(x)}, \mathcal{W}_0|_{N_0^3(x)}) \text{ erfüllt Bedingung (B)} \quad (1.3).$$

Im Fall (a) sei nun x ein beliebiges Element aus X , im Fall (b) wähle man $x \in X$ mit

$$(4) \quad P \circ N_0(x) \in \mathcal{G} \quad (\mathcal{G} \text{ ist } \mathcal{W} \wedge \mathcal{V}\text{-C.F. und } P \circ N_0 \in \mathcal{W} \wedge \mathcal{V} \text{ wegen (VB2)}).$$

Wegen (3) gibt es zu M eine halbmétrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ mit $N_0 \in \mathcal{W}_0$, so daß

$$\forall \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter } \mathcal{f} \text{ mit } N_0^3(x) \in \mathcal{f} \quad \exists N \in \mathcal{W} \quad \forall A \in \mathcal{f} \quad \exists a \in A: \\ N(a) \cap N_0^3(x) \subset M(a) \cap N_0^3(x)$$

und folglich auch

$$(5) \quad \forall \mathcal{W}_0\text{-C.F. } \mathcal{f} \text{ mit } N_0^2(x) \in \mathcal{f} \quad \exists N \in \mathcal{W} \quad \forall A \in \mathcal{f} \quad \exists a \in A: N(a) \subset M(a)$$

gilt. Die halbmetrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0$ kann hierbei (mittels eines induktiven Verfahrens) so gewählt werden, daß $(\mathcal{H}, \mathcal{W}_0)$ Bedingung (VB2) erfüllt und insbesondere

$$(6) \quad \forall N \in \mathcal{W}_0 \quad \exists N' \in \mathcal{W}_0: N' \circ P \subset P \circ N$$

gilt ($(\mathcal{H}, \mathcal{W})$ erfüllt (VB2); (2)). Des weiteren läßt sich eine halbmetrisierbare Uniformität $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ mit $P \in \mathcal{H}_0$ wählen, so daß $(\mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ die Bedingung (VB2) erfüllt. $\mathcal{W}_0 \wedge \mathcal{H}_0$ ist dann eine halbmetrisierbare Uniformität (Basisdarstellung von $\mathcal{W}_0 \wedge \mathcal{H}_0$), die gröber als $\mathcal{W} \wedge \mathcal{H}$ ist.

Für den Fall (a) sei nun $\mathcal{G}$ ein beliebiger $\mathcal{W}_0 \wedge \mathcal{H}_0$ -Cauchyfilter (dieser erfüllt wegen $N_0(x) = X$ auch (4)).

In beiden Fällen genügt es nun zu zeigen:

$$\exists N' \in \mathcal{W} \quad \forall B \in \mathcal{G} \quad \exists b \in B: P \circ N'(b) \subset M^*(b) \quad (P \circ N' \in \mathcal{W} \wedge \mathcal{H}).$$

Zu dem $\mathcal{H}_0 \wedge \mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ gibt es gemäß Lemma 1.9 (+ Zusatz) einen $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ mit

$$(7) \quad (P^2)^{-1}(\mathcal{g}) \subset \mathcal{f}$$

und $N_0^2(x) \in \mathcal{f}$ ($\mathcal{W}_0$ halbmetrisierbar; $(\mathcal{H}_0, \mathcal{W}_0)$ erfüllt (VB2); (4); (6)).

Nach (5) existiert $N \in \mathcal{W}$ mit

$$(8) \quad \forall A \in \mathcal{f} \quad \exists a \in A: N(a) \subset M(a).$$

Wähle mittels (2) $N' \in \mathcal{W}$ mit

$$(9) \quad N' \circ P^2 \subset P^2 \circ N.$$

Sei nun $B \in \mathcal{G}$ gegeben.

Da $(P^2)^{-1}(B) \overset{(7)}{\in} \mathcal{f}$, gibt es gemäß (8) ein $a \in (P^2)^{-1}(B)$ mit

$$(10) \quad N(a) \subset M(a).$$

Wählt man nun $b \in B$ mit $a \in (P^2)^{-1}(b)$, so gilt

$$P \circ N'(b) \subset P \circ N' \circ P^2(a) \overset{(9)}{\subset} P^3 \circ N(a) \overset{(10)}{\subset} P^3 \circ M(a) \subset P^3 \circ M \circ (P^2)^{-1}(b) \overset{(1)}{\subset} M^*(b).$$

1.12 Korollar

Sei X eine Menge und $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ Uniformitäten auf X , so daß $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ Bedingung (B) erfüllt. Ist R eine mit $\mathcal{W}$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X , so erfüllt auch $(\mathcal{V}/R, \mathcal{W}/R)$ Bedingung (B).

Beweis

Da $(\mathcal{V}_R, \mathcal{W})$ die Verträglichkeitsbedingung (VB2) erfüllt (s. 1.7), erfüllt gemäß Proposition 1.11 (a) mit $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ auch $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}_R, \mathcal{W} \wedge \mathcal{V}_R)$ Bedingung (B). Weil $\mathcal{V} \wedge \mathcal{V}_R$ bzw. $\mathcal{W} \wedge \mathcal{V}_R$ die Initialuniformität bzgl. der Quotientenabbildung $q: X \longrightarrow (X/R, \mathcal{V}/R)$ bzw. $q: X \longrightarrow (X/R, \mathcal{W}/R)$ ist (U.S., chap. 4, exercise 6), folgt durch eine einfache Überlegung, daß auch $(\mathcal{V}/R, \mathcal{W}/R)$ Bedingung (B) erfüllt (q surjektiv).

Im nächsten Schritt soll Proposition 1.11 auf topologische Gruppen angewandt werden.

1.13 Satz

Sei X eine topologische Gruppe, die Bedingung (B) erfüllt, und G eine Untergruppe von X . Dann gilt:

- (a) Jeder $\mathcal{V}/G \wedge \mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter ist ein $\mathcal{V}/G$ -Cauchyfilter; insbesondere ist $\mathcal{V}/G \wedge \mathcal{R}/G$ vollständig, falls $\mathcal{V}/G$ vollständig ist.
- (b) Falls G neutral in X ist, so ist jeder $\mathcal{V}/G \wedge \mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter ein $\mathcal{V}/G \vee \mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter; insbesondere ist $\mathcal{V}/G \wedge \mathcal{R}/G$ vollständig, falls $\mathcal{V}/G \vee \mathcal{R}/G$ vollständig ist.

Beweis

- (a) Da die von G erzeugte Äquivalenzrelation R_G mit der Rechtsuniformität $\mathcal{R}$ verträglich ist (s. 1.7), genügt nach Korollar 1.12 das Paar $(\mathcal{V}/G, \mathcal{R}/G)$ der Bedingung (B). Nach Lemma 1.8 erfüllt $(\mathcal{V}/G, \mathcal{R}/G)$ Verträglichkeitsbedingung (VB2), und damit folgt die Behauptung aus Proposition 1.11 (a) (+ Bemerkung).
- (b) Man führe den Schluß von (a) nochmals durch, wobei man $\mathcal{V}$ und $\mathcal{R}$ vertauscht, und erhält so insgesamt die Behauptung.

Bemerkungen

(a) Teil (b) des Satzes verallgemeinert vier Aussagen aus U.S.:

(1) X ASIN-Gruppe $\implies$ Jeder $\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{R}$ -C.F. ist ein $\mathfrak{L} \vee \mathfrak{R}$ -C.F.
(U.S., 10.17 a) ,

(2) X vollständige inframetrisierbare top. Gruppe
 $\implies \mathfrak{L} \wedge \mathfrak{R}$ vollständig (U.S., 11.20) .

Da für eine vollständige topologische Gruppe X mit inframetrisierbarer neutraler Untergruppe G der Quotient $\mathfrak{L}/G$ vollständig ist (U.S., 11.17), erhält man aus Teil (b) (sowie (a)) auch die folgenden Aussagen aus U.S. ((4) nur für den Fall $D=\{e\}$):

(3) X lokalkompakte top. Gruppe, $G \leq_n X \implies (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{R})/G$ vollständig
(U.S., 11.8(a)),

(4) X top. Gr., $D < G < X$ neutrale Ugr., $\mathfrak{L}/D$ halbmtr. und vollständig
 $\implies (\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{R})/G$ vollständig (U.S., 11.3(b)) .

(b) Der Umstand, daß in Teil (a) des Satzes die Untergruppe G nicht notwendigerweise neutral zu sein braucht, läßt sich für Aussagen über die Vollständigkeit von $\mathfrak{L}/G \wedge \mathfrak{R}/G$ kaum nutzbringend verwenden, da es für nicht neutrales G keine (nicht trivialen) Aussagen über die Vollständigkeit von $\mathfrak{L}/G$ gibt. So enthält meine Diplomarbeit das Beispiel einer lokalkompakten (also vollständigen) metrisierbaren topologischen Gruppe X mit Untergruppe G , so daß der Quotient $\mathfrak{L}/G$ (und damit auch $\mathfrak{L}/G \wedge \mathfrak{R}/G$) unvollständig ist (Diplomarbeit, 2.8; $\gamma_{\mathfrak{L}/G \wedge \mathfrak{R}/G} = \gamma_{\mathfrak{L}/G}$).

(c) In der Voraussetzung des Satzes kann weder auf den Vollständigkeits- noch auf den Metrisierbarkeitsaspekt der Bedingung (B) ohne weiteres verzichtet werden:

Ist X eine metrisierbare topologische Gruppe, die keine Gruppenvervollständigung besitzt (U.S., 10.18(a)), so existiert in X eine $\mathfrak{R}$ - (also insbesondere eine $\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{R}$ -) Cauchyfolge, die keine $\mathfrak{L}$ -Cauchyfolge ist (U.S., 10.15).

In U.S., 8.14(a), findet sich das Beispiel einer vollständigen topologischen Gruppe, bei der $\mathfrak{L} \wedge \mathfrak{R}$ nicht vollständig ist.

2. Kapitel Vollständigkeit von Quotienten der Rechtsuniformität
eines topologischen semidirekten Produkts.
Liftbarkeit von Folgen und Netzen.

Zunächst wird auf einer topologischen Gruppe eine von einer Untergruppe abhängige Uniformität $\mathcal{Q}_V$ definiert. Die Tatsache, daß sich $\mathcal{Q}_V$ als Infimum darstellen läßt, ermöglicht es, bei der Untersuchung der Vollständigkeit von $\mathcal{Q}_V$ die Resultate aus Kapitel 1 zu verwenden; insbesondere wird hier wieder die Bedingung (B) aus Definition 1.1 eine wichtige Rolle spielen. Aus den so erzielten Ergebnissen können dann für ein topologisches semidirektes Produkt $X = G \overset{\text{top}}{\times}_O H$ Aussagen über die Vollständigkeit von $\mathcal{R}/H$ gewonnen werden (Satz 2.5). (Über dieses Kapitel hinaus wird die Uniformität $\mathcal{Q}_V$ auch in den Kapiteln 3 und 4 von Bedeutung sein, so z.B. in 3.4, 3.12, 3.13, 4.4 .)

Schließlich wird an einer Reihe von Beispielen semidirekter Produkte gezeigt, daß beim Liften von $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolgen (H metrisierbar) pathologische Situationen entstehen können (s. S. 29ff).

2.1 Definition

Sei $(X, \mathcal{F})$ eine topologische Gruppe, G eine Untergruppe von X und $\mathcal{Z}_G$ die von der Äquivalenzrelation $R_G = \{(x, y) \in X \times X : y \in xG\}$ erzeugte Uniformität.

Dann sei $\mathcal{Q}_V := \mathcal{R} \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)$.

Statt $\mathcal{Q}_V$ werden gegebenenfalls die ausführlicheren Notationen $\mathcal{Q}_V(G)$, $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}}(G)$ oder $\mathcal{Q}_{V, X}(G)$ verwendet.

Bemerkung

Offenbar gilt:

- $\mathcal{L} \wedge \mathcal{R} \subset \mathcal{Q}_V \subset \mathcal{R}$ und damit $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}_V} = \mathcal{F}$,
- $\mathcal{Q}_V/G = \mathcal{R}/G$,
- $G = \{e\} \implies \mathcal{Q}_V = \mathcal{R}$,
- $G = X \implies \mathcal{Q}_V = \mathcal{R} \wedge \mathcal{L}$.

2.2 Lemma

Sei X eine topologische Gruppe, $D < G < X$ Untergruppen und $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}(G)$.
Dann gilt:

(a) $\mathcal{Q}/D = \mathcal{R}/D \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D$.

Das Paar $(\mathcal{R}/D, (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D)$ erfüllt die Verträglichkeitsbedingung (VB2) aus Definition/Bemerkung 1.7.

(b) Gilt $D \leq_n G$, so bilden die Mengen

$$\{(xD, yD) \in (X/D) \times (X/D) : y \in Ux(U \cap G)D\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$$

eine Basis von $\mathcal{Q}/D$.

(c) Falls $D \leq_n X$, so gilt $\mathcal{Q}/D = \mathcal{R}/D \wedge (\mathcal{L}/D \vee \mathcal{Z}_G/D)$.

Beweis

(a) Der erste Teil folgt aus der Transitivitätseigenschaft von Finaluniformitäten (s. U.S., 0.23). Der zweite Teil läßt sich wie Lemma 1.8 beweisen, da $(\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D$ eine linksinvariante Basis besitzt ($\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G$ besitzt eine linksinvariante Basis; U.S., 4.16).

(b) Die Mengen $\{(xD, yD) \in (X/D) \times (X/D) : y \in UxU\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$
bilden eine Basis von $\mathcal{R}/D$ (U.S., 5.21), die Mengen

$$(1) \quad \{(xD, yD) \in (X/D) \times (X/D) : y \in xD(U \cap G)D\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$$

eine Basis von $(\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D$ (wegen $D \leq_n G$ ist R_D mit $\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G$ verträglich). Da nun gemäß (a) das Paar $(\mathcal{R}/D, (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D)$ Bedingung (VB2) und damit auch (VB1) aus 1.7 erfüllt, bilden die Mengen

$$\{(xD, yD) \in (X/D) \times (X/D) : y \in UxD(U \cap G)D\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$$

eine Basis des Infimums $\mathcal{R}/D \wedge (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D = (\mathcal{Q}/D)$.

Aus der Neutralität von D in G folgt schließlich die Behauptung.

(c) Die Mengen

$$(q_D \times q_D)(U_{\mathcal{L}}) \cap (q_D \times q_D)(R_G) = \{(xD, yD) \in X/D \times X/D : y \in xDUD \cap xG\} \quad (U \in \mathcal{U}_e)$$

(wobei $q_D: X \longrightarrow X/D$ die Quotientenabbildung bezeichnet) bilden eine Basis von $\mathcal{L}/D \vee \mathcal{Z}_G/D$ (U.S., 5.28). Da die Mengen aus (1) eine Basis von $(\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D$ bilden und $DUD \cap G = D(U \cap G)D$ ($U \in \mathcal{U}_e$), folgt

$$\mathcal{L}/D \vee \mathcal{Z}_G/D = (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G)/D.$$

2.3 Satz

Sei X eine topologische Gruppe und $D < G < X$ Untergruppen, so daß das Paar $(\mathbb{R}_G/D, \mathbb{L}_G/D)$ die Bedingung (B) aus 1.1 erfüllt (dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn $D \leq_n G$ und G Bedingung (B) erfüllt (1.12)).

Dann ist jeder $\mathcal{O}_f(G)/D$ -Cauchyfilter auf X/D ein $\mathbb{R}/D$ -Cauchyfilter (und umgekehrt); insbesondere ist $\mathcal{O}_f(G)/D$ vollständig, wenn $\mathbb{R}/D$ vollständig ist.

Beweis (mit Hilfe von Proposition 1.11(b))

Man setze

$$\mathcal{W} = (\mathbb{R} \vee \mathbb{J}_G)/D, \quad \mathcal{W} = (\mathbb{L} \vee \mathbb{J}_G)/D, \quad \mathcal{W}_f = \mathbb{R}/D \quad \text{und} \quad N_0 = (q_D \times q_D)(\mathbb{R}_G) \in \mathcal{W}.$$

Wie im folgenden gezeigt wird, sind die Voraussetzungen in 1.11(b) erfüllt:

- $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ erfüllt Verträglichkeitsbedingung (VB2) (Lemma 2.2(a)).

- Für alle $s \in X/D$ erfüllt $(\mathcal{W}|_{N_0(s)}, \mathcal{W}|_{N_0(s)})$ Bedingung (B):

Da $N_0(q_D(x)) = q_D(xG)$ ($x \in X$), und da die Linkstranslationen

$$\tilde{I}_x: (X/D, \mathcal{W}) \longrightarrow (X/D, \mathcal{W}), \quad q_D(y) \longmapsto q_D(xy), \quad \text{bzw.}$$

$$\tilde{I}_x: (X/D, \mathcal{W}) \longrightarrow (X/D, \mathcal{W}) \quad (x \in X) \quad \text{uniforme Äquivalenzen sind (U.S.,}$$

2,24; universelle Eigenschaft der Final- und Initialuniformität

(U.S., 0.18, 0.22)), genügt es zu zeigen

$$(1) \quad (\mathcal{W}|_{q_D(G)}, \mathcal{W}|_{q_D(G)}) \text{ erfüllt Bedingung (B).}$$

Es gilt

$$(2) \quad \mathcal{W}|_{q_D(G)} = ((\mathbb{R} \vee \mathbb{J}_G)|_G)/D = (\mathbb{R}|_G \vee \mathbb{J}_G|_G)/D = \mathbb{R}_G/D$$

(die erste Gleichheit folgt aus U.S., 4.10 Remark (6) ($\mathbb{R}_D$ ist mit $\mathbb{R} \vee \mathbb{J}_G$ verträglich)). Über Basisdarstellungen von $\mathbb{L}_G/D$ und $\mathcal{W}$ (s. dazu U.S., chap. 4, 'bases of final uniformities') sieht man

$$(3) \quad \mathcal{W}|_{q_D(G)} = \mathbb{L}_G/D.$$

(Ist D neutral in G , so läßt sich (3) auch wie Aussage (2) beweisen.)

Da nach Voraussetzung $(\mathbb{R}_G/D, \mathbb{L}_G/D)$ Bedingung (B) erfüllt, folgt Aussage (1) unmittelbar aus (2) und (3).

Daraus folgt nun, daß jeder $\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}_f (= \mathcal{O}_f(G)/D)$ -Cauchyfilter ein

$\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}_f (= \mathbb{R}/D)$ -Cauchyfilter ist, was zu zeigen war.

Im folgenden wird nun der Fall topologischer semidirekter Produkte (s. dazu U.S., 6.10 - 6.25) behandelt.

Bei einem äußeren topologischen semidirekten Produkt $X = G \overset{\text{top}}{\rtimes} H$ wird gegebenenfalls stillschweigend der Normalteiler $G \times \{e_H\}$ mit G und die Untergruppe $\{e_G\} \times H$ mit H identifiziert. Somit kann X auch als inneres topologisches semidirektes Produkt $G \overset{\text{top}}{\ltimes} H$ aufgefaßt werden.

Ist umgekehrt ein inneres topologisches semidirektes Produkt $X = G \overset{\text{top}}{\ltimes} H$ gegeben und $\sigma: H \longrightarrow \text{Aut}(G)$, $h \longmapsto (\sigma_h: g \longmapsto hgh^{-1})$, so ist das äußere topologische semidirekte Produkt $G \overset{\text{top}}{\rtimes} H$ definiert und die Abbildung $G \overset{\text{top}}{\ltimes} H \longrightarrow X$, $(g, h) \longmapsto gh$, ist ein topologischer Isomorphismus.

Das folgende Lemma ermöglicht die Anwendung von Satz 2.3 auf topologische semidirekte Produkte.

2.4 Definition/Lemma (vgl. U.S., nach 11.34)

Sei $X = G \overset{\text{top}}{\ltimes} H$ ein topologisches semidirektes Produkt.

$\tilde{q}_H$ bezeichne die Initialuniformität bzgl. der Bijektion $q_H|_G: G \longrightarrow (X/H, \mathcal{R}/H)$.

Dann bilden die Mengen

$$\{(g, \hat{g}) \in G \times G: \hat{g} \in U(\sigma_v(g): v \in V)\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(G), \quad V \in \mathcal{U}_e(H))$$

eine Nachbarschaftsbasis von $\tilde{q}_H$, und es gilt

$$\tilde{q}_H = q_H(H)|_G.$$

Beweis

Die Basisdarstellung von $\tilde{q}_H$ findet sich in U.S., nach 11.34.

Die Mengen $\{(x, y) \in X \times X: y \in UVxV\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(G), \quad V \in \mathcal{U}_e(H))$ bilden eine Basis von $q_H(H)$ (Lemma 2.2(b)).

Für $U \in \mathcal{U}_e(G)$ und $V = V^{-1} \in \mathcal{U}_e(H)$ gilt:

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in X \times X: y \in UVxV\} \cap G \times G &= \{(g, \hat{g}) \in G \times G: \hat{g} \in UVgV\} = \\ &= \{(g, \hat{g}) \in G \times G: \exists v, \hat{v} \in V: \hat{g} \in (U\sigma_v(g))(\hat{v}\hat{v})\} = \\ &= \{(g, \hat{g}) \in G \times G: \hat{g} \in U\{\sigma_v(g): v \in V\}\}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $q_H(H)|_G = \tilde{q}_H$.

2.5 Satz

Sei $X = G \overset{\text{top}}{\underset{0}{\ltimes}} H$ ein topologisches semidirektes Produkt, so daß die Untergruppe H die Bedingung (B) aus 1.1 erfüllt.

Dann ist jeder $\tilde{\mathcal{Q}}$ -Cauchyfilter auf G auch ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchyfilter.

Insbesondere ist $\mathcal{R}_X/H$ (genau dann) vollständig, wenn $(G, \mathcal{R}_G)$ vollständig ist.

Beweis

Die Behauptung ergibt sich sofort aus der Anwendung von Definition/Lemma 2.4, Satz 2.3 und $\mathcal{R}_X|G = \mathcal{R}_G$, sowie $\gamma_{\tilde{\mathcal{Q}}} = \gamma_{\mathcal{R}_G}$.

Bemerkungen

(a) Dieser Satz stellt eine Verschärfung von U.S., 11.36, dar: dort wird von der Untergruppe H anstatt der Bedingung (B) die stärkere Bedingung (ASIN) (s. S. 1, sowie Lemma 1.2) gefordert.

(b) (vgl. 1.13 Bemerkung (c))

Wie Beispiel 2.10 und die darauffolgenden Beispiele zeigen, genügt es nicht, für die Untergruppe H die Metrisierbarkeit allein (d.h. ohne Gruppenvervollständigung (s. Lemma 1.2)) zu fordern.

Andererseits genügt es aber auch nicht, für H nur die Existenz einer Gruppenvervollständigung zu verlangen:

In U.S., 12.6, findet sich das Beispiel eines vollständigen topologischen semidirekten Produkts $X = G \overset{\text{top}}{\underset{0}{\ltimes}} H$ mit offener (also neutraler) Untergruppe H , bei dem $\mathcal{R}_X/H$ unvollständig ist. (Mit H hat man ein Beispiel für eine vollständige topologische Gruppe, die wegen 2.5 Bedingung (B) nicht erfüllt.)

2.6 Definition

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein uniformer Raum, Y eine Menge und $f: (X, \mathcal{W}) \longrightarrow Y$ eine Abbildung. $\mathcal{Q}$ sei ein Filter auf Y , $(y_l)_{l \in I}$ sei ein Netz und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Y .

(a) Man sagt 'der Filter $\mathcal{Q}$ läßt sich (bzgl. f) zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ liften', falls es einen $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ gibt, so daß der von $f(\mathcal{F})$ erzeugte Filter feiner als $\mathcal{Q}$ ist.

(b) Man sagt 'das Netz $(y_\lambda)_{\lambda \in I}$ läßt sich (bzgl. f) zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchynetz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ liften', falls es ein $\mathcal{W}$ -Cauchynetz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ gibt, so daß das Netz $(f(x_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$ feiner als $(y_\lambda)_{\lambda \in I}$ ist.

(Ein Netz $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ heißt feiner als ein Netz $(y_\lambda)_{\lambda \in I}$, wenn es eine Verbindungsabbildung $\phi: \Lambda \longrightarrow I$, d.h. eine Abbildung mit $\forall \lambda \in \Lambda \exists \kappa \in I \forall \lambda \geq \kappa: \phi(\lambda) \geq \kappa$, gibt, so daß $x_\lambda = y_{\phi(\lambda)}$ ($\lambda \in \Lambda$) (s. dazu R. Engelking, S. 74 oben).)

(c) Man sagt 'die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ läßt sich (bzgl. f) zu einer $\mathcal{W}$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liften', falls es eine $\mathcal{W}$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $f(x_n) = y_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Bemerkung

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein vollständiger uniformer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X und $q: X \longrightarrow X/R$ die Quotientenabbildung.

Dann besteht ein enger Zusammenhang zwischen der Liftbarkeit von $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfiltern und der Vollständigkeit von $\mathcal{W}/R$, denn es gilt:

Läßt sich jeder $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter auf X/R zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter auf X liften, so ist $\mathcal{W}/R$ vollständig (U.S., Remark nach 11.7);
ist R mit $\mathcal{W}$ verträglich, so gilt auch die Umkehrung (U.S., chap. 11, exercise 10).

Im nächsten Lemma wird die Liftbarkeit von $\mathcal{R}/H$ -Cauchynetzen und -folgen für topologische semidirekte Produkte $G \overset{\text{top}}{\times}_0 H$ charakterisiert.

2.7 Lemma

Sei $X = G \overset{\text{top}}{\times}_0 H$ ein topologisches semidirektes Produkt; $q: X \longrightarrow X/H$ bezeichne die Quotientenabbildung. Dann gilt:

(a) Ein Netz $(q(g_\lambda))_{\lambda \in I}$ mit $g_\lambda \in G$ ($\lambda \in I$) in X/H läßt sich genau dann zu einem $\mathcal{R}_X$ -Cauchynetz in X liften, wenn es ein $\mathcal{R}_H$ -Cauchynetz $(h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in H und eine Verbindungsabbildung $\phi: \Lambda \longrightarrow I$ gibt mit

$$g_{\phi(\lambda)} \circ h_{\lambda} \circ h_{\lambda}^{-1} (g_{\phi(\lambda)}^{-1}) \xrightarrow{\lambda, \lambda} e_G.$$

(b) Eine Folge $(q(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ in X/H mit $g_n \in G$ ($n \in \mathbb{N}$) läßt sich genau dann zu einer $\mathcal{R}_X$ -Cauchyfolge in X liften, wenn es eine $\mathcal{R}_H$ -Cauchyfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H gibt mit

$$g_m \sigma_{h_m h_n^{-1}}(g_n^{-1}) \longrightarrow e_G, \quad m, n \longrightarrow \infty.$$

(c) Ein Netz $(g_i)_{i \in I}$ in G ist genau dann ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz, wenn es ein konvergentes Netz $(h_i)_{i \in I}$ in H gibt mit

$$g_i \sigma_{h_i h_{\tilde{i}}^{-1}}(g_{\tilde{i}}^{-1}) \xrightarrow{i, \tilde{i}} e_G.$$

Bemerkung

In (c) läßt sich die Voraussetzung 'konvergentes Netz' nicht zu ' $\mathcal{R}_H$ -Cauchynetz' abschwächen, wie Beispiel 2.10 zeigen wird.

Beweis

(a) und (b) erhält man aus der Definition des Liftens, wenn man für ein Netz $(g_i, h_i)_{i \in I}$ in X folgende Äquivalenzen betrachtet:

$(g_i, h_i)_{i \in I}$ ist ein $\mathcal{R}_X$ -Cauchynetz

$$\iff (g_i \sigma_{h_i h_{\tilde{i}}^{-1}}(g_{\tilde{i}}^{-1}), h_i h_{\tilde{i}}^{-1}) = (g_i, h_i)(g_{\tilde{i}}, h_{\tilde{i}})^{-1} \xrightarrow{i, \tilde{i}} e_X$$

$$\iff g_i \sigma_{h_i h_{\tilde{i}}^{-1}}(g_{\tilde{i}}^{-1}) \xrightarrow{i, \tilde{i}} e_G \quad \text{und} \quad (h_i)_{i \in I} \text{ ist ein } \mathcal{R}_H\text{-Cauchynetz.}$$

(c) "hinr.": Sei $U \in \mathcal{U}_e(G)$ gegeben. Wähle $\kappa \in I$ mit

$g_i \in U \sigma_{h_i h_{\kappa}^{-1}}(g_{\kappa})$ ($i \geq \kappa$). Definiere $g := \sigma_{h_{\kappa}^{-1}}(g_{\kappa})$. Sei $h \in H$ mit

$h_i \xrightarrow{i} h$; damit gibt es $\lambda \geq \kappa$ mit $\sigma_{h_i}(g) \in U \sigma_h(g)$ ($i \geq \lambda$).

Für $i \geq \lambda$ gilt dann $g_i \in U \sigma_{h_i}(g) \subset U^2 \sigma_h(g)$.

"notw.": Definiere $h_i := e_H$ ($i \in I$).

2.8 Proposition (Verallgemeinerung von U.S., 12.7)

Sei $X = G \overset{\text{top}}{\rtimes} H$ ein topologisches semidirektes Produkt. Dann gilt:

Es gibt eine $\mathcal{L}_{\hat{X}} \vee \mathcal{R}_{\hat{X}}$ -vollständige topologische Gruppe $\hat{X}$, die X als dichte Untergruppe enthält, und ($\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ -vollständige) Untergruppen $\hat{G}$ und $\hat{H}$ von $\hat{X}$, so daß $\hat{X} = \hat{G} \overset{\text{top}}{\rtimes} \hat{H}$ und $G < \hat{G}$, $H < \hat{H}$.

Ist X Hausdorffsch, so kann $\hat{X}$ auch Hausdorffsch gewählt werden.

Besitzt G (bzw. H) eine Gruppenvervollständigung, so ist $\hat{G}$ (bzw. $\hat{H}$) vollständig (U.S., 10.23 Remark (a); U.S., 10.28 Remark; G bzw. H ist dicht in $\hat{G}$ bzw. $\hat{H}$).

Besitzen G und H Gruppenvervollständigungen, so ist $\hat{X}$ eine Gruppenvervollständigung von X (U.S., 12.5(a)).

Beweis

Gemäß U.S., 10.24, ist X dichte Untergruppe einer topologischen Gruppe Z , die $\mathcal{L}_Z \vee \mathcal{R}_Z$ -vollständig ist. Ist X Hausdorffsch, so kann man Z auch Hausdorffsch wählen (U.S., 10.12(c)). Mit $\hat{G} := \overline{G}^Z$ und $\hat{H} := \overline{H}^Z$ erhält man $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ -vollständige Untergruppen von Z . Nach U.S., 3.22, ist $\hat{G}$ Normalteiler von Z . Damit ist die Abbildung

$$\tau: \hat{H} \longrightarrow \text{Aut}(\hat{G}), \hat{h} \longmapsto \tau_{\hat{h}} \text{ mit } \tau_{\hat{h}}(\hat{g}) := \hat{h}\hat{g}\hat{h}^{-1} \quad (\hat{g} \in \hat{G}),$$

ein wohldefinierter Homomorphismus.

Da die Operation

$$\hat{H} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G}, (\hat{h}, \hat{g}) \longmapsto \tau_{\hat{h}}(\hat{g}) = \hat{h}\hat{g}\hat{h}^{-1},$$

stetig ist (Z ist topologische Gruppe), wird durch $\hat{X} := \hat{G} \overset{\text{top}}{\rtimes}_{\tau} \hat{H}$ ein topologisches semidirektes Produkt definiert. Nach U.S., 12.5(b), ist $(\hat{X}, \mathcal{L}_{\hat{X}} \vee \mathcal{R}_{\hat{X}})$ vollständig.

Sei $\sigma: H \longrightarrow \text{Aut}(G)$, $h \longmapsto \sigma_h$, definiert durch $\sigma_h(g) := \tau_h(g)$ ($g \in G$).

Dann stellt $G \overset{\text{top}}{\rtimes}_{\sigma} H$ ein topologisches semidirektes Produkt dar, welches dichte Untergruppe von $\hat{X} = \hat{G} \overset{\text{top}}{\rtimes}_{\tau} \hat{H}$ ist.

Identifiziert man nun $G \overset{\text{top}}{\rtimes}_{\sigma} H$ mit $G \overset{\text{top}}{\rtimes} H$, und faßt man $\hat{X}$ als inneres topologisches semidirektes Produkt auf (s. vor 2.4), so erhält man die Behauptung.

2.9 Satz

Sei $X = G \overset{\text{top}}{\underset{\circ}{\rtimes}} H$ ein topologisches semidirektes Produkt, so daß H eine Gruppenvervollständigung besitzt. Dann gilt:

Läßt sich ein $\mathcal{R}/H$ -Cauchynetz $(q_H(g_l))_{l \in I}$ mit $g_l \in G$ ($l \in I$) zu einem $\mathcal{R}$ -Cauchynetz in X liften, so ist $(g_l)_{l \in I}$ schon ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz.

Bemerkung

Beispiel 2.10 wird zeigen, daß die Aussage des Satzes nicht gilt, wenn man für H keine Gruppenvervollständigung fordert.

Beweis

1. Spezialfall 'H ist vollständig':

Nach Lemma 2.7 (a) gibt es ein $\mathcal{R}_H$ -Cauchynetz $(h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ in H und eine Verbindungsabbildung $\phi: \Lambda \longrightarrow I$, so daß

$$g_{\phi(\lambda)} \sigma_{h_\lambda h_\lambda^{-1}}(g_{\phi(\lambda)}) \xrightarrow{\lambda, \tilde{\lambda}} e.$$

Da H vollständig ist, konvergiert das $\mathcal{R}_H$ -Cauchynetz $(h_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und somit ist nach 2.7 (c) $(g_{\phi(\lambda)})_{\lambda \in \Lambda}$ ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz. Damit besitzt das $\tilde{\mathcal{O}}_I$ -Cauchynetz $(g_l)_{l \in I}$ ein feineres $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz, woraus folgt, daß $(g_l)_{l \in I}$ selbst ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz ist (nach U.S., 9.20 und 10.5(a), erfüllt $(\mathcal{R}_X, \mathcal{R}_X \wedge \mathcal{P}_X)$ und damit auch $(\mathcal{R}_X|G, \mathcal{O}_I(H)|G) = (\mathcal{R}_G, \tilde{\mathcal{O}}_I)$ Bedingung (7) aus Lemma 1.2).

2. Allgemeiner Fall:

Da H eine Gruppenvervollständigung hat, ist X Untergruppe eines topologischen semidirekten Produkts $\hat{X} = \hat{G} \overset{\text{top}}{\underset{\circ}{\rtimes}} \hat{H}$, wobei $\hat{H}$ vollständig ist, sowie $G < \hat{G}$ und $H < \hat{H}$ (2.8). Weil die Abbildung

$$(X/H, \mathcal{R}_X/H) \longrightarrow (\hat{X}/\hat{H}, \mathcal{R}_{\hat{X}}/\hat{H}), \quad xH \longmapsto x\hat{H},$$

gleichmäßig stetig ist (univ. Eigenschaft der Finalunif.: $\mathcal{R}_X = (k_{\hat{X}}|X)$, ist $(q_{\hat{H}}(g_l))_{l \in I}$ ein $\mathcal{R}_{\hat{X}}/\hat{H}$ -Cauchynetz. Weil sich nach Voraussetzung

$(q_H(g_l))_{l \in I}$ zu einem $\mathcal{R}_X$ -Cauchynetz in X liften läßt, kann man $(q_{\hat{H}}(g_l))_{l \in I}$ zu einem $\mathcal{R}_{\hat{X}}$ -Cauchynetz in $\hat{X}$ liften.

Aus Teil 1 folgt dann, daß $(g_l)_{l \in I}$ ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz in $\hat{G}$ und damit ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz in G ist.

2.10 Beispiel

$G := (\mathbb{Z}_2)^{(\mathbb{N})} \quad (:= \{ (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{Z}_2)^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : k_n \neq 0\} \text{ ist endlich} \})$,

versehen mit der diskreten Topologie, und

$H := \{ \pi \in S(\mathbb{N}) : \{n \in \mathbb{N} : \pi(n) \neq n\} \text{ ist endlich} \}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz bzgl. der diskreten Topologie auf $\mathbb{N}$ (s. U.S., chap. 2, exercise 3) sind metrisierbare topologische Gruppen. Mit

$\sigma: H \longrightarrow \text{Aut}(G)$, $\pi \longmapsto \sigma_\pi$, wobei $\sigma_\pi((k_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (k_{\pi^{-1}(n)})_{n \in \mathbb{N}}$

$((k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in G)$, ist ein Homomorphismus gegeben. Da die Abbildung

$H \times G \longrightarrow G$, $(\pi, g) \longmapsto \sigma_\pi(g)$, stetig ist, wird durch $X := G \overset{\text{top}}{\times}_O H$

ein metrisierbares topologisches semidirektes Produkt definiert, in dem H eine offene (G diskret), also insbesondere neutrale Untergruppe ist.

Durch $g_n := (\delta_{n,m})_{m \in \mathbb{N}} \quad (n \in \mathbb{N})$ ($\delta_{n,m}$ bezeichne das Kroneckersymbol)

wird eine Folge in G definiert, die keine $\mathcal{R}_G$ -Cauchyfolge ist (G diskret).

Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist aber eine $\tilde{\mathcal{Q}}$ -Cauchyfolge in G , wie im folgenden gezeigt wird:

Für $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $g_i = \sigma_{\pi_{i,j}}(g_j)$, wobei $\pi_{i,j} \in H$ diejenige Permutation von $\mathbb{N}$ ist, die i und j vertauscht und alle übrigen Elemente aus $\mathbb{N}$ fest läßt. Da die Mengen

$\{(g, \hat{g}) \in G \times G : \hat{g} \in \{ \sigma_\pi(g) : \pi \in H, \pi(i) = i \text{ für } i = 1, \dots, n \} \} \quad (n \in \mathbb{N})$

eine Basis von $\tilde{\mathcal{Q}}$ bilden (Def./Lemma 2.4; G diskret), folgt die Behauptung.

Damit ist $(q_H(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolge (Definition von $\tilde{\mathcal{Q}}$), die sich wegen der Metrisierbarkeit von X zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X liften läßt (Liftungssatz für halbmetrisierbare uniforme Räume (U.S., 11.2)).

Aus Lemma 2.7(b) folgt, daß es eine $\mathcal{R}_H$ -Cauchyfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H gibt mit $g_m - \sigma_{h_m} h_n^{-1}(g_n) \longrightarrow e_G$, $m, n \longrightarrow \infty$ (vgl. Bemerkung zu 2.7).

Im letzten Teil des Kapitels wird anhand von Beispielen gezeigt, daß in der Situation ' $X = G \overset{\text{top}}{\underset{\mathcal{R}}{\mathcal{L}}} H$, H metrisierbar' folgende pathologische Fälle auftreten können:

- (a) Es gibt eine $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolge in X/H , die (aufgefaßt als Netz) sich nicht zu einem $\mathcal{R}$ -Cauchynetz in X liften läßt.
- (b) Es gibt eine $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolge in X/H , die sich nicht zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X liften läßt, obwohl sie eine Teilfolge besitzt, die sich zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X liften läßt.
- (c) Es gibt eine $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolge in X/H , die keine Teilfolge besitzt, welche sich zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X liften läßt, obwohl sie selbst zu einem $\mathcal{R}$ -Cauchynetz in X geliftet werden kann.

Die Beispiele werden insbesondere zeigen, daß die Metrisierbarkeit von H allein, also ohne Vollständigkeit, nicht genügt, um $\mathcal{R}/H$ -Cauchynetze bzw. -folgen liften zu können (vgl. Satz 2.5). (Im Fall der Linksuniformität $\mathcal{L}$ dagegen ist in der Situation ' X topologische Gruppe, G neutrale und halbmetrisierbare Untergruppe' das Liften von $\mathcal{L}/G$ -Cauchyfiltern bzw. -folgen auf X/G zu $\mathcal{L}$ -Cauchyfiltern bzw. -folgen auf X stets möglich (U.S., 11.17; U.S., 11.28).)

Es bleibt allerdings - wegen der Unvollständigkeit von X - noch offen, ob für eine vollständige topologische Gruppe X mit metrisierbarer Untergruppe G der Quotient $(X/G, \mathcal{R}/G)$ vollständig ist (s. dazu Beispiel 3.10).

Das folgende Lemma wird zur Konstruktion der Untergruppe H in den Beispielen verwendet.

2.11 Lemma

Sei X eine topologische Gruppe und T eine Menge. Dann wird durch

$$X^{[T]} := \{(x_t)_{t \in T} \in X^T : \{x_t : t \in T\} \text{ ist endlich}\} \quad (< X^T)$$

(offenbar) eine Gruppe definiert, und die Mengen

$$\hat{U} := U^T \cap X^{[T]} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$$

bilden eine e -Umgebungsbasis einer Gruppentopologie auf $X^{[T]}$.

Ist X halbmetrisierbar (bzw. Hausdorffsch), so ist offensichtlich auch $X^{[T]}$ halbmetrisierbar (bzw. Hausdorffsch).

Beweis

Die Mengen $\hat{U}$ ($U \in \mathcal{U}_e(X)$) bilden eine Filterbasis auf $X^{[T]}$, und es gilt:

$$- (\hat{U})^2 = \hat{U}^2 \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$$

$$- (\hat{U})^{-1} = \hat{U}^{-1} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X))$$

- Sei $U \in \mathcal{U}_e(X)$ und $x = (x_t)_{t \in T} \in X^{[T]}$ gegeben. Da $\{x_t : t \in T\}$ endlich ist, gibt es $V \in \mathcal{U}_e(X)$ mit $x_t V x_t^{-1} \subset U$ ($t \in T$). Daraus folgt $x \hat{V} x^{-1} \subset \hat{U}$.

Damit ergibt sich die Behauptung aus U.S., 1.21.

2.12 Beispiele (vgl. Seite 29, oben)

Für die Konstruktion der folgenden Beispiele sei ein topologisches semidirektes Produkt $G \overset{\text{top}}{\times} H$ mit metrisierbarem H gegeben, so daß es eine $\tilde{\mathcal{U}}$ -Cauchyfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G gibt, die keine $\mathcal{R}_G$ -Cauchyfolge ist und damit (als Netz aufgefaßt) auch kein $\mathcal{R}_G$ -Cauchyteilnetz enthält ($(\mathcal{R}_G, \tilde{\mathcal{U}})$ erfüllt Bedingung (7) aus 1.2 (s. Beweis von 2.9, Teil 1)). Ein Beispiel für ein solches topologisches semidirektes Produkt findet sich in 2.10.

(Die nun folgenden Beispiele (a), (b), (c) beziehen sich jeweils auf die entsprechend bezeichneten Fälle auf Seite 29.)

(a) Sei T eine überabzählbare Menge. G^T , versehen mit der Produkttopologie, und $H^{(T)}$, aufgefaßt als Untergruppe von $H^{[T]}$ ($H^{[T]}$ gemäß 2.11) sind topologische Gruppen. Wegen der Metrisierbarkeit von H ist $H^{[T]}$ und damit auch $H^{(T)}$ metrisierbar. Durch

$$\tau: H^{(T)} \longrightarrow \text{Aut}(G^T), \quad \bar{h} = (h_t)_{t \in T} \longmapsto \tau_{\bar{h}} := \prod_{t \in T} \sigma_{h_t},$$

wird ein Monomorphismus definiert. Da die Topologie auf $H^{(T)}$ feiner ist als die auf $H^{(T)}$ relativierte Produkttopologie von H^T , ist die Operation $H^{(T)} \times G^T \longrightarrow G^T$, $(\bar{h}, \bar{g}) \longmapsto \tau_{\bar{h}}(\bar{g})$, stetig.

Somit wird durch $X := G^T \overset{\text{top}}{\times}_{\tau} H^{(T)}$ ein topologisches semidirektes Produkt definiert.

Durch $\bar{g}_n := (g_n)_{t \in T}$ ($n \in \mathbb{N}$) wird eine $\tilde{\mathcal{U}}$ -Cauchyfolge in G^T definiert:

Sei $E \subset T$ endlich, $U \in \mathcal{U}_e(G)$ und $V \in \mathcal{U}_e(H)$ gegeben.

Da $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\tilde{\mathcal{U}}$ -Cauchyfolge in G ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ und

$v_n \in V$ ($n \geq k$) mit $g_n \in U \sigma_{v_n}(g_k)$ ($n \geq k$).

Für $n \geq k$ wird durch $\bar{v}_n := (v_{n,t})_{t \in T}$, wobei

$$v_{n,t} := \begin{cases} v_n & \text{für } t \in E \\ e_H & \text{für } t \in T \setminus E \end{cases},$$

ein Element aus $\hat{V} \cap H^{(T)}$ ($\hat{V}$ wie in 2.11) definiert, und es gilt

$$\bar{g}_n \in \left(\bigcap_{t \in E} U \times \bigcap_{t \notin E} G \right) \tau_{\bar{v}_n}^{-1}(\bar{g}_k) \quad (n \geq k).$$

$(\bar{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine $\tilde{\mathcal{U}}$ -Cauchyfolge in G^T .

Damit ist $(q_{H^{(T)}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{R}_X/H^{(T)}$ -Cauchyfolge in $X/H^{(T)}$ (2.4).

Annahme: $(q_{H^{(T)}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ läßt sich zu einem $\mathcal{R}_X$ -Cauchynetz in X liften.

Gemäß 2.7(a) gibt es ein $\mathcal{R}$ -Cauchynetz $(\bar{h}_l)_{l \in I}$ in $H^{(T)}$ mit $\bar{h}_l = (h_{l,t})_{t \in T}$ ($l \in I$) und eine Verbindungsabbildung

$$\phi: I \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad \bar{g}_{\phi(l)} \tau_{\bar{h}_l}^{-1}(\bar{g}_{\phi(\tilde{l})}) \xrightarrow{l, \tilde{l}} e_{G^T}.$$

Daraus folgt

$$(1) \quad g_{\phi(l)} \sigma_{h_{l,t}} h_{\tilde{l},t}^{-1} (g_{\phi(\tilde{l})}) \xrightarrow{l, \tilde{l}} e_G \quad (t \in T).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß es $t^* \in T$ gibt, so daß

$$(2) \quad h_{l,t^*} \xrightarrow{l} e_H \quad \text{gilt:}$$

Sei $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathcal{U}_e(H)$ (H ist metrisierbar).

Da $(\bar{h}_l)_{l \in I}$ ein $\mathcal{R}$ -Cauchynetz in $H^{(T)}$ ist, gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\kappa_n \in I$ mit

$$(3) \quad \bar{h}_l \in (\hat{V}_n \cap H^{(T)}) \bar{h}_{\kappa_n} \quad (l \geq \kappa_n).$$

Weil T überabzählbar und die Menge $\{t \in T: h_{\kappa_n,t} \neq e_H\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ endlich ist, kann man $t^* \in T$ wählen mit

$h_{\kappa_n,t^*} = e_H$ ($n \in \mathbb{N}$). Aus (3) folgt nun für $n \in \mathbb{N}$, daß

$h_{l,t^*} \in v_n$ ($l \geq \kappa_n$), und damit ist (2) gezeigt.

Aus (1) und (2) folgt mit Lemma 2.7(c), daß $(g_{\phi(1)})_{1 \in I}$ ein $\mathcal{R}_G$ -Cauchynetz in G ist; dies steht im Widerspruch dazu, daß $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voraussetzungsgemäß kein $\mathcal{R}_G$ -Cauchyteilnetz enthält.

In den nun folgenden Beispielen (b) und (c) wird zusätzlich vorausgesetzt, daß G diskret ist (auch dies ist in Beispiel 2.10 erfüllt).

Die Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann so gewählt werden, daß

$$(4) \quad g_n \neq g_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Da $G \overset{\text{top}}{\times} H$ nun metrisierbar ist, kann die $\mathcal{R}/H$ -Cauchyfolge $(q_H(g_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in $G \overset{\text{top}}{\times} H$ geliftet werden. Nach Lemma 2.7(b) gibt es damit eine $\mathcal{R}_H$ -Cauchyfolge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in H und $k^* \in \mathbb{N}$ mit

$$(5) \quad g_m \sigma_{h_m h_n}^{-1}(g_n^{-1}) = e_G \quad (m, n \geq k^*) \quad (G \text{ diskret}).$$

(b) Sei $T := T_1 \cup T_2$, wobei T_1 und T_2 disjunkte überabzählbare Mengen sind. G^T sei mit der Produkttopologie,

$$H^{<T>} := \{(h_t)_{t \in T} \in H^{[T]} : \exists h \in H: h = h_t \text{ für fast alle } t \in T\} \quad (< H^{[T]})$$

mit der von $H^{[T]}$ ($H^{[T]}$ gemäß 2.11) induzierten Topologie versehen.

Da H metrisierbar ist, ist auch $H^{<T>}$ metrisierbar. Definiert man

$$\tau: H^{<T>} \longrightarrow \text{Aut}(G^T), \quad \bar{h} = (h_t)_{t \in T} \longmapsto \tau_{\bar{h}} := \prod_{t \in T} \sigma_{h_t},$$

so erhält man mit $X := G^T \overset{\text{top}}{\times} H^{<T>}$ ein topologisches semidirektes Produkt (vgl. (a)).

Für $n \in \mathbb{N}$ werde $\bar{g}_n = (g_{n,t})_{t \in T} \in G^T$ definiert durch

$$g_{n,t} := \begin{cases} g_{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade und } t \in T_2 \\ g_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ähnlich wie in (a) beweist man, daß $(\bar{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\widetilde{\mathcal{O}}_V$ -Cauchyfolge in G^T ist; damit ist $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{R}_X/H^{<T>}$ -Cauchyfolge in $X/H^{<T>}$.

Mit Lemma 2.7(b) wird nun gezeigt, daß die Teilfolge $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_n))_{n \in 2\mathbb{N}}$ zu einer $\mathcal{R}_X$ -Cauchyfolge in X geliftet werden kann:

Durch $\bar{h}_n := (h_n)_{t \in T}$ ($n \in \mathbb{N}$) ($((h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus (5)) wird eine $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in $H^{<T>}$ definiert ($((h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in H). Für $m, n \in 2\mathbb{N}$ mit $m, n \geq k^*$ gilt nun

$$\bar{g}_m \tau_{\bar{h}_m \bar{h}_n^{-1}}(\bar{g}_n^{-1}) = (g_m \circ h_m h_n^{-1}(g_n^{-1}))_{t \in T} = e_{GT}.$$

Daraus folgt mit 2.7(b) die Behauptung.

Annahme: $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ läßt sich zu einer $\mathcal{R}_X$ -Cauchyfolge in X liften.

Nach Lemma 2.7(b) gibt es dann in $H^{<T>}$ eine $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge $(\bar{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\bar{h}_n = (h_{n,t})_{t \in T}$ ($n \in \mathbb{N}$), so daß (insbesondere) gilt:

$$(6) \quad \bar{g}_{n+1} \tau_{\bar{h}_{n+1} \bar{h}_n^{-1}}(\bar{g}_n^{-1}) \longrightarrow e_{GT}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Gemäß der Definition von $H^{<T>}$ gibt es eine abzählbare Teilmenge $A \subset T$, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Familie $(h_{n,t})_{t \in T \setminus A}$ konstant ist. Da T_1 und T_2 überabzählbar sind, existiert $t_1 \in T_1 \setminus A$ und $t_2 \in T_2 \setminus A$. Wegen (6) und der Diskretheit von G kann man $k \in 2\mathbb{N}$ wählen mit

$$g_{k+1} \sigma_{h_{k+1,t_1} h_k^{-1}}(g_k^{-1}) = e_G \quad (g_{k+1,t_1} = g_{k+1}, \quad g_{k,t_1} = g_k)$$

und

$$g_{k+2} \sigma_{h_{k+1,t_2} h_k^{-1}}(g_k^{-1}) = e_G \quad (g_{k+1,t_2} = g_{k+2}, \quad g_{k,t_2} = g_k).$$

Da $t_1, t_2 \notin A$, gilt $h_{k+1,t_1} h_{k,t_1}^{-1} = h_{k+1,t_2} h_{k,t_2}^{-1}$, und es

folgt $g_{k+1} = g_{k+2}$ im Widerspruch zu (4).

(c) Sei $\Psi := \{\psi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \text{ streng monoton steigend}\}$ und $\Psi^* := \Psi \cup \{1\}$.

$(T_\psi)_{\psi \in \Psi^*}$ sei eine Familie p.w. disjunkter überabzählbarer Mengen und

$T := \bigcup_{\psi \in \Psi^*} T_\psi$. $X := G^T \overset{\tau}{\times} H^{<T>}$ sei analog zu X in Beispiel (b) definiert.

Für $n \in \mathbb{N}$ werde $\bar{g}_n = (g_{n,t})_{t \in T} \in G^T$ definiert durch

$$g_{n,t} := \begin{cases} g_{n+1} & \text{falls } \exists \psi \in \Psi: t \in T_\psi \text{ und } n \in \psi(2\mathbb{N}) \\ g_n & \text{sonst.} \end{cases} \quad (t \in T)$$

Ähnlich wie in (a) beweist man, daß $(\bar{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in G^T ist; damit ist $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{R}/H^{<T>}$ -Cauchyfolge in $X/H^{<T>}$.

Mit Lemma 2.7(a) wird nun gezeigt, daß sich $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ zu einem $\mathcal{R}_X$ -Cauchynetz in X liften läßt:

Sei $\mathcal{E} := \{E \subset T: E \text{ endlich}\}$; die Menge $I := \mathcal{E} \times \mathbb{N}$ sei komponentenweise geordnet. Durch $\phi: I \longrightarrow \mathbb{N}, (E, n) \longmapsto n$, wird eine Verbindungsabbildung zwischen I und $\mathbb{N}$ definiert.

Für $\iota = (E, n) \in I$ sei $\bar{h}_\iota = (h_{\iota, t})_{t \in T} \in H^{<T>}$ definiert durch

$$h_{\iota, t} := \begin{cases} h_{n+1} & \text{falls } \exists \psi \in \Psi: t \in T_\psi \cap E \text{ und } n \in \psi(2\mathbb{N}) \\ h_n & \text{sonst} \end{cases} \quad ((h_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ aus (5)}) .$$

Da $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{R}_H$ -Cauchyfolge in H ist, folgt, wie leicht zu sehen ist, daß $(\bar{h}_\iota)_{\iota \in I}$ ein $\mathcal{R}$ -Cauchynetz in $H^{<T>}$ ist.

Wegen 2.7(a) genügt es nun zu zeigen, daß

$$(7) \quad \bar{g}_{\phi(\iota)} \tau_{\bar{h}_\iota} \bar{h}_\iota^{-1} (\bar{g}_{\phi(\tilde{\iota})}^{-1}) \xrightarrow{\iota, \tilde{\iota}} e_{G^T} .$$

Sei dazu $E \in \mathcal{E}$ gegeben; für $\iota = (E, n)$, $\tilde{\iota} = (\tilde{E}, \tilde{n}) \geq (E, k^*)$ (k^* aus (5)) gilt nun

$$(g_t)_{t \in T} := \bar{g}_{\phi(\iota)} \tau_{\bar{h}_\iota} \bar{h}_\iota^{-1} (\bar{g}_{\phi(\tilde{\iota})}^{-1}) \in \prod_{t \in E} \{e_G\} \times \prod_{t \in T \setminus E} G$$

(woraus (7) folgt):

$$\text{Für } t \in E \cap T_1 \text{ gilt } g_t = g_n \sigma_{h_n h_n^{-1}} (g_{\tilde{n}}^{-1})^{(5)} = e_G .$$

Sei nun $t \in E \cap \bigcup_{\psi \in \Psi} T_\psi$. Wähle $\psi \in \Psi$ mit $t \in E \cap T_\psi$.

Fall 1: $n \in \psi(2\mathbb{N})$ und $\tilde{n} \in \psi(2\mathbb{N})$.

$$\text{Es gilt } g_t = g_{n+1} \sigma_{h_{n+1} h_{n+1}^{-1}} (g_{\tilde{n}+1}^{-1})^{(5)} = e_G .$$

Fall 2: $n \in \psi(2\mathbb{N})$ und $\tilde{n} \notin \psi(2\mathbb{N})$.

$$\text{Es gilt } g_t = g_{n+1} \sigma_{h_{n+1} h_{\tilde{n}}^{-1}} (g_{\tilde{n}}^{-1})^{(5)} = e_G .$$

Fall 3 und Fall 4: analog.

Als nächstes wird nun gezeigt, daß die Folge $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ keine Teilfolge besitzt, die zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X geliftet werden kann:

Annahme: Es gibt $\psi \in \Psi$, so daß sich $(q_{H^{<T>}}(\bar{g}_{\psi(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ zu einer $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X liften läßt.

Nach Lemma 2.7(b) gibt es dann in $H^{<T>}$ eine $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge

$(\bar{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\bar{h}_n = (h_{n,t})_{t \in T}$ ($n \in \mathbb{N}$), so daß (insbesondere) gilt:

$$(8) \quad \bar{g}_{\psi(n+1)} \tau_{\bar{h}_{n+1}}^{-1} (\bar{h}_n^{-1} (\bar{g}_{\psi(n)})) \longrightarrow e_{G^T}, \quad n \longrightarrow \infty.$$

Man schließt nun weiter wie an der entsprechenden Stelle in Beispiel (b), wobei T_ψ die Rolle von T_2 und $g_{\psi(k)}$ die Rolle von g_k ($k \in \mathbb{N}$) übernimmt, und gelangt so zu einem Widerspruch.

3. Kapitel Vollständigkeit von Quotienten der Rechtsuniformität einer topologischen Gruppe.

In diesem Kapitel wird der Quotient $\mathbb{R}/G$ für den allgemeinen Fall einer topologischen Gruppe X mit Untergruppe G auf Vollständigkeit hin untersucht.

Zunächst wird in mehreren Schritten (3.1, 3.2, 3.3) eine Technik zum Liften von Cauchyfiltern entwickelt. Mit Hilfe dieser Technik lassen sich dann Aussagen über die Liftbarkeit von $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfiltern herleiten, wobei vorausgesetzt wird, daß die zugrundeliegende topologische Gruppe X die Bedingung (B) aus 1.1 erfüllt und G inframetrisierbar ist (3.4, 3.5). Des weiteren werden $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfolgen auf Liftbarkeit hin untersucht (3.8).

In Beispiel 3.10 wird schließlich eine vollständige topologische Gruppe X (die Bedingung (B) nicht erfüllt) und eine diskrete, also metrisierbare Untergruppe $D < X$ konstruiert, so daß $\mathbb{R}/D$ unvollständig ist.

Im letzten Teil des Kapitels werden dann für die Untergruppe G topologische direkte Produkte betrachtet (3.11ff).

3.1 Lemma

Sei X eine Menge und $\mathcal{W}$, $\mathcal{W}'$ und $\mathcal{Z}$ Uniformitäten auf X , so daß das Paar $(\mathcal{Z}, \mathcal{W}')$ die Verträglichkeitsbedingung (VB1) aus 1.7 erfüllt. Dann gilt:

(a) Aus $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ folgt $(\mathcal{W} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{W}' = \mathcal{W} \vee (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W}')$.

(b) Erfüllt $(\mathcal{W}, \mathcal{W}')$ Bedingung (10) aus Lemma 1.2, so erfüllt

$((\mathcal{W} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{W}', \mathcal{W} \vee (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W}'))$ Bedingung (4) aus 1.2 (insbesondere ist dann jeder $\mathcal{W} \vee (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W}')$ -Cauchyfilter ein $(\mathcal{W} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{W}'$ -Cauchyfilter).

Beweis

(a) Da die Mengen $N \circ P$ ($N \in \mathcal{W}', P \in \mathcal{Z}$) eine Basis von $\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W}'$ bilden (Def./Bem. 1.7), folgt die Inklusion ' $\subset$ ' aus

$$(*) \quad N \circ ((N^{-1} \circ M) \cap P) \supset M \cap (N \circ P) \quad (M \in \mathcal{W}, N \in \mathcal{W}', P \in \mathcal{Z}).$$

Die Inklusion ' $\supset$ ' erhält man aus

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{W} \supset (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{V} = \mathcal{V} \text{ und } (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{W} \supset \mathcal{Z} \wedge \mathcal{W} .$$

(b) Sei $M \in \mathcal{V}$, $N \in \mathcal{W}$ und $P \in \mathcal{Z}$ gegeben. Gemäß Bedingung (10) aus 1.2 wähle man zu M eine Nachbarschaft $M_0 \in \mathcal{V}$ mit $M_0^{-1} \subset M$ und

$$(1) \quad \forall x \in X \quad \exists \hat{N} \in \mathcal{W}: \quad \hat{N}(M_0^2(x)) \subset M(x) .$$

Sei nun $x \in X$ gegeben. Wähle nach (1) $\hat{N} \in \mathcal{W}$ mit $\hat{N} \subset N$ und

$$(2) \quad \hat{N}^{-1}(M_0^2(x)) \subset M(x) .$$

Für $a \in (M_0 \cap (N \circ P))(x)$ gilt dann

$$\begin{aligned} (M_0 \cap (\hat{N} \circ P))(a) &\stackrel{(*)}{\subset} \hat{N} \circ ((\hat{N}^{-1} \circ M_0) \cap P)(a) \subset N \circ (\hat{N}^{-1}(M_0^2(x)) \cap P(a)) \subset \\ &\stackrel{(2)}{\subset} N \circ (M(x) \cap P(a)) \subset N \circ (M^2 \cap P)(a) . \end{aligned}$$

Bemerkungen

(a) In Teil (b) des Lemmas kann man nicht auf eine Inklusionsbeziehung zwischen den Uniformitäten $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \wedge \mathcal{W}$ und $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Z} \wedge \mathcal{W})$ schließen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$X := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{R}) : a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} \}$, versehen mit der üblichen

Topologie, ist eine topologische Gruppe (vgl. Lemma 1.2, Bemerkung ' $(\text{ASIN}) \not\Rightarrow (\text{SIN})$ '); damit erfüllt das Paar $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ die Bedingung (10) aus 1.2.

Durch $G := \{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in X : k \in \mathbb{Z} \}$ wird eine diskrete Untergruppe von X definiert. Bezeichnet $\mathcal{Z}_G$ die von der Äquivalenzrelation

$R_G = \{(x, y) \in X \times X : y \in xG\}$ induzierte Uniformität, so erfüllt das Paar $(\mathcal{Z}_G, \mathcal{R})$ die Verträglichkeitsbedingung (VB1) (Def./Bem. 1.7). Für

$\delta > 0$, $\delta \neq 1$, und $v := \begin{pmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x := \begin{pmatrix} (1-\delta)^{-1} & \delta^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $g := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ gilt $xvx^{-1} = vxgx^{-1} = \begin{pmatrix} 1-\delta & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit kann man $U \in \mathcal{U}_e(X)$ wählen mit

$$\forall v \in \mathcal{U}_e(X) \quad \exists x \in X: \quad Ux \not\subset xV \cap VxG .$$

Da G und damit auch $\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G$ diskret ist, folgt

$$(\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G) \wedge \mathcal{R} = \mathcal{R} \neq \mathcal{L} \vee (\mathcal{Z}_G \wedge \mathcal{R}) .$$

Weil X keine SIN-Gruppe ist, erhält man

$$\mathcal{R} \supset (\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G) \wedge \mathcal{R} \not\subset \mathcal{L} \vee (\mathcal{Z}_G \wedge \mathcal{R}) \supset \mathcal{L} .$$

(b) Im folgenden wird nun als Anwendung von 3.1(a) der erste Teil von Korollar 1.10 (Liftungssatz für halbmetrisierbare uniforme Räume) verallgemeinert.

Satz (vgl. U.S., 11.14)

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein uniformer Raum und R eine mit $\mathcal{W}$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X , so daß $\mathcal{W} \vee \mathcal{Z}_R$ halbmetrisierbar ist. Dann läßt sich jeder $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ auf X/R zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X liften.

Beweis

Da $\mathcal{W} \vee \mathcal{Z}_R$ halbmetrisierbar ist, gibt es eine halbmetrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ mit $\mathcal{W}_0 \vee \mathcal{Z}_R = \mathcal{W} \vee \mathcal{Z}_R$; $\mathcal{W}_0$ kann (durch ein induktives Verfahren) mit R verträglich gewählt werden.

Da $\mathcal{G}$ insbesondere ein $\mathcal{W}_0/R$ -Cauchyfilter ist, folgt nun, daß $\mathcal{G}$ zu einem $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X geliftet werden kann (1.10). $\mathcal{F}$ ist also ein $\mathcal{W}_0 \vee (\mathcal{Z}_R \wedge \mathcal{W})$ -Cauchyfilter ($\mathcal{Z}_R \wedge \mathcal{W}$ ist nach U.S., chap. 4, exercise 6, die Initialuniformität auf X bzgl. der Quotientenabbildung $q: X \longrightarrow (X/R, \mathcal{W}/R)$) und damit nach 3.1(e) ein $(\mathcal{W}_0 \vee \mathcal{Z}_R) \wedge \mathcal{W} (= \mathcal{W})$ -Cauchyfilter.

Sei nun X eine topologische Gruppe und G eine Untergruppe von X . Dann bilden die Mengen $\{(x, y) \in X \times X: y \in x(U \cap G)\}$ ($U \in \mathcal{U}_e(X)$) eine Basis von $\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G$.

Ist G nun halbmetrisierbar, so ist offensichtlich auch $\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G$ halbmetrisierbar (und der soeben bewiesene Satz läßt sich, falls $G \leq_n X$ ist, auf diese Situation anwenden). Für die Rechtsuniformität $\mathcal{R}$ allerdings gilt die entsprechende Aussage nicht, d.h. aus der Halbmetrisierbarkeit von G kann nicht auf die Halbmetrisierbarkeit von $\mathcal{R} \vee \mathcal{Z}_G$ geschlossen werden (U.S., 11.34(b) Example). Damit die Halbmetrisierbarkeit von G dennoch zum Liften von $\mathcal{R}/G$ -Cauchyfiltern ausgenützt werden kann, wird auch in diesem Fall die Uniformität $\mathcal{L} \vee \mathcal{Z}_G$ in die Untersuchungen einbezogen.

3.2 Lemma

Sei $(X, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe und $G < X$.

- (a) Ist $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ eine Uniformität auf X mit linksinvarianter Basis (s. Beweis zu 1.8) und $\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G = \mathcal{L} \vee \mathcal{J}_G$, so gilt:

Läßt sich ein $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfilter $\mathcal{Q}$ auf X/G zu einem $\mathcal{L}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X liften, so ist $\mathcal{f}$ ein $\mathcal{Q}(G)$ -Cauchyfilter.

- (b) Gibt es eine Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf X mit

(i) $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}$,

(ii) $\mathcal{T}|_G = \mathcal{T}|_G$,

(iii) $(X, \mathcal{T})$ besitzt eine Gruppenvervollständigung,
so gilt:

Läßt sich ein $\mathbb{R}_\mathcal{T}/G$ -Cauchyfilter $\mathcal{Q}$ auf X/G zu einem $\mathcal{R}_\mathcal{T}$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X liften, so ist $\mathcal{f}$ schon ein $\mathcal{Q}_\mathcal{T}(G)$ -Cauchyfilter; erfüllt G Bedingung (B) aus 1.1, so ist $\mathcal{f}$ sogar ein $\mathbb{R}_\mathcal{T}$ -Cauchyfilter (Satz 2.3).

Bemerkung

Aus Teil (b) des Lemmas erhält man mit U.S., 11.19, und Lemma 1.2(b) folgenden Satz:

Sei $(X, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe und $G < X$. Gibt es auf X eine gröbere inframetrisierbare Gruppentopologie $\mathcal{T}$, die eine Gruppenvervollständigung besitzt und auf G mit $\mathcal{T}$ übereinstimmt, so läßt sich jeder $\mathbb{R}_\mathcal{T}/G$ -Cauchyfilter auf X/G zu einem $\mathbb{R}_\mathcal{T}$ -Cauchyfilter auf X liften.

Diese Aussage wird in Satz 3.5 nochmals verschärft.

Beweis von 3.2

- (a) Das Paar $(\mathcal{J}_G, \mathbb{R})$ erfüllt Verträglichkeitsbedingung (VB1) aus 1.7.

Des weiteren erfüllt das Paar $(\mathcal{L}_0, \mathbb{R})$ Bedingung (10) aus 1.2:

Für vorgegebenes $U \in \mathcal{U}_e(X)$ mit $U_\mathcal{L} \in \mathcal{L}_0$ gibt es $U_0 \in \mathcal{U}_e(X)$, so daß $(U_0)_\mathcal{L} \in \mathcal{L}_0$ und $U_0^2 \subset U$ ($\mathcal{L}_0$ besitzt linksinvariante Basis).

Sei nun $a \in X$ gegeben. Wählt man $V \in \mathcal{U}_e(X)$ mit $Va \subset aU_0$, so gilt

$$V_\mathbb{R}((U_0)_\mathcal{L}(a)) = V_\mathbb{R}(aU_0) = VaU_0 \subset aU_0^2 \subset aU = U_\mathcal{L}(a).$$

Damit folgt aus Lemma 3.1(b), daß der $\mathcal{L}_0 \vee (\mathcal{J}_G \wedge \mathbb{R})$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ ein $(\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G) \wedge \mathbb{R} (= \mathcal{Q}(G))$ -Cauchyfilter ist.

- (b) Wegen (iii) ist $\mathcal{F}$ auch ein $\mathcal{L}_g$ -Cauchyfilter (U.S., 10.23) und damit nach Teil (a) (mit $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}_g$) ein $\mathcal{O}_g(G)$ -Cauchyfilter.

3.3 Lemma

Sei X eine Menge und $\mathcal{W}, \mathcal{W}$ Uniformitäten auf X , so daß $\mathcal{W}$ halbmétrisierbar ist und das Paar $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ Bedingung (B) aus 1.1 erfüllt. R sei eine mit $\mathcal{W}$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X und $q: X \longrightarrow X/R$ bezeichne die Quotientenabbildung.

Dann läßt sich jeder $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ auf X/R bzgl. q zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X liften.

Bemerkungen

- (a) Setzt man $\mathcal{W} = \mathcal{W}$, so erfüllt $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ trivialerweise Bedingung (B), und man erhält den ersten Teil von Korollar 1.10 (Liftungssatz für halbmétrisierbare uniforme Räume).
- (b) Da $\mathcal{W}$ halbmétrisierbar ist, kann die Bedingung (B) für $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ folgendermaßen verschärft werden:

$$\exists \mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}, \mathcal{W}_0 \text{ halbmétrisierbare Uniformität } \forall M \in \mathcal{W} \\ \forall \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter } \mathcal{F} \exists N \in \mathcal{W} \forall A \in \mathcal{F} \exists a \in A: N(a) \subset M(a) .$$

(Für den Beweis des Lemmas kann diese Verschärfung hier allerdings nicht ausgenutzt werden.)

Beweis

Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nachbarschaftsbasis von $\mathcal{W}$ mit

$$(1) \quad M_1 = X \times X \text{ und } M_{n+1}^2 \subset M_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (\mathcal{W} \text{ halbmétrisierbar}) .$$

Es werden nun induktiv Folgen $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) und $N_n \in \mathcal{W}$ ($n \in \mathbb{N}$) konstruiert, so daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(2)_n \quad N_n^2(x_n) \subset M_n(x_n) ,$$

$$(3)_n \quad q(N_n(x_n)) \in \mathcal{G} ,$$

$$(4)_n \quad x_n \in M_{n-1}(x_{n-1}) , \text{ falls } n \geq 2 .$$

Induktionsanfang ($n=1$): Wählt man $x_1 \in X$ beliebig und definiert

$N_1 := X \times X$, so sind $(2)_1$, $(3)_1$ und $(4)_1$ erfüllt.

Induktionsschritt $(n-1 \rightarrow n)$: Sei $n \geq 2$ und seien $x_1, \dots, x_{n-1}$ und $N_1, \dots, N_{n-1}$ schon geeignet gewählt.

Gemäß Bedingung (B) gibt es zu M_n eine halbmetrisierbare Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ mit

$$(5) \quad \forall \mathcal{W}_0\text{-Cauchyfilter } \mathcal{F} \exists N \in \mathcal{W} \quad \forall A \in \mathcal{F} \exists a \in A: N^2(a) \subset M_n(a) .$$

Hierbei kann $\mathcal{W}_0$ (induktiv) mit R verträglich gewählt werden ($\mathcal{W}$ ist mit R verträglich), und es läßt sich zusätzlich $N_{n-1} \in \mathcal{W}_0$ erreichen.

Nach Korollar 1.10 gibt es einen $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ mit

$$(6) \quad q(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G} \quad \text{und}$$

$$(7) \quad N_{n-1}^2(x_{n-1}) \in \mathcal{F}$$

($\mathcal{W}_0$ halbmetrisierbar; R mit $\mathcal{W}_0$ verträglich; $\mathcal{G}$ ist ein $\mathcal{W}_0/R$ -C.F.; $(3)_{n-1}$).

Wähle zu $\mathcal{F}$ gemäß (5) eine Nachbarschaft $N_n \in \mathcal{W}$ mit

$$(8) \quad \forall A \in \mathcal{F} \exists a \in A: N_n^2(a) \subset M_n(a) .$$

Da $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter und R mit $\mathcal{W}$ verträglich ist, gibt es $B \in \mathcal{G}$ mit

$$(9) \quad B \subset q(N_n(x)) \quad (x \in \bar{q}^{-1}(B)) .$$

Wegen (6) und (7) existiert $A \in \mathcal{F}$ mit

$$(10) \quad q(A) \subset B \quad \text{und}$$

$$(11) \quad A \subset N_{n-1}^2(x_{n-1}) .$$

Nach (8) gibt es nun $x_n \in A$ mit

$$N_n^2(x_n) \subset M_n(x_n) ; \text{ damit ist } (2)_n \text{ erfüllt.}$$

Aus (9) und (10) folgt $(3)_n$, und aus (11) und $(2)_{n-1}$ folgt $(4)_n$.

$$\text{Da } M_{n+1}^2(x_{n+1}) \stackrel{(4)(1)}{\subset} M_n^2(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ und}$$

$$q(M_n(x_n) \cap \bar{q}^{-1}(B)) = q(M_n(x_n)) \cap B \stackrel{(2)}{\supset} q(N_n(x_n)) \cap B \stackrel{(3)}{\neq} \emptyset \quad (n \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{G}) ,$$

wird durch

$$\mathcal{F} := \langle \{ M_n(x_n) \cap \bar{q}^{-1}(B) : n \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{G} \} \rangle$$

ein Filter auf X definiert, für den offensichtlich $q(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}$ gilt.

Da die Mengen M_n ($n \in \mathbb{N}$) eine Basis von $\mathcal{W}$ bilden, ist $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter.

3.4 Satz

Sei X eine topologische Gruppe, die Bedingung (B) aus 1.1 erfüllt, und $D \leq_n G < X$, so daß $(G/D, \mathcal{L}_G/D)$ inframetrisierbar ist.

Dann läßt sich jeder $\mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ auf X/G (bzgl. der Abbildung $p: X/D \longrightarrow X/G$, $xD \longmapsto xG$) zu einem $\mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter $\mathcal{H}$ auf X/D liften; insbesondere ist $\mathcal{R}/G$ vollständig, falls $\mathcal{R}/D$ vollständig ist.

Bemerkungen

- (a) Dieser Satz verallgemeinert die Sätze 11.19a und 13.36 aus U.S. (nach U.S., 13.20, ist jede fast metrisierbare topologische Gruppe inframetrisierbar), außerdem den Satz 11.19 aus U.S. für den Fall ' $D = \{e\}$, X besitzt eine Gruppenvervollständigung'.
- (b) Beispiel 3.10 wird zeigen, daß sich die Vollständigkeit von einer topologischen Gruppe i.a. nicht auf Quotienten der Rechtsuniformität nach diskreten Untergruppen vererbt.
- (c) Aus 2.5, Bemerkung (b), in Verbindung mit U.S., 11.34(a), folgt, daß es eine vollständige topologische Gruppe X gibt, so daß für jede inframetrisierbare Untergruppe G der Quotient $\mathcal{R}/G$ vollständig ist, obwohl X die Bedingung (B) nicht erfüllt.
- (d) Die Untersuchung der Situation ' $D \leq_n G < X$ ' wird insbesondere dann von Nutzen sein, wenn für G Produkte inframetrisierbarer topologischer Gruppen betrachtet werden (s. 3.12).

Beweis von 3.4

Da $D \leq_n G$ und $\mathcal{L}_G/D$ inframetrisierbar ist, gibt es gemäß U.S., 11.16(iii), eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_e(X)$ mit

$$(1) \quad \forall U \in \mathcal{U}_e(X) \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \exists E \in G, E \text{ endlich: } U_n \cap G \subset E(U \cap G)D.$$

Die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann hierbei so gewählt werden, daß die Mengen $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine (linksinvariante) Basis einer halbmétrisierbaren Uniformität $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}$ bilden (Vorgehensweise: $U_{n+1}^2 \subset U_n = U_n^{-1}$ ($n \in \mathbb{N}$)). Somit erfüllt das Paar $(\mathcal{L}_0, \mathcal{R})$ Bedingung (10) aus Lemma 1.2 (s. Beweis von 3.2(a)).

Nach Voraussetzung erfüllt $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ und damit trivialerweise auch $(\mathcal{L}_0, \mathcal{R})$ Bedingung (B). Aus Lemma 3.3 (mit $\mathcal{W} = \mathcal{L}_0$, $\mathcal{W} = \mathcal{R}$, $R = R_G$) folgt nun, daß sich der $\mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ bzgl. q_G zu einem $\mathcal{L}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{H}$

auf X liften läßt. Damit ist $\mathcal{F}$ nach Lemma 3.1(b) als $\mathcal{L}_0 \vee (\mathcal{J}_G \wedge \mathcal{R})$ -Cauchyfilter auch ein $\mathcal{R} \wedge (\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G)$ -Cauchyfilter $((\mathcal{L}_0, \mathcal{R})$ erfüllt Bedingung (10) aus 1.2).

Sei nun $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf X/D , der feiner als der Bildfilter $q_D(\mathcal{F})$ ist. Offensichtlich gilt $p(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Q}$. Es soll nun gezeigt werden, daß $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{Q}(G)/D$ -Cauchyfilter ist:

Sei dazu $U \in \mathcal{U}_e(X)$ vorgegeben. Nach (1) gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $E \subset G$ endlich mit

$$(2) \quad U_n \cap G \subset E(U \cap G)D.$$

Da $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{R} \wedge (\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G)$ -Cauchyfilter ist und die Mengen

$$\{(x, y) \in X \times X : y \in Ux(U_n \cap G)\} \quad (U \in \mathcal{U}_e(X), n \in \mathbb{N})$$

eine Basis von $\mathcal{R} \wedge (\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G)$ bilden (da $\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G$ eine linksinvariante Basis besitzt, kann man wie im Beweis von Lemma 1.8 zeigen, daß

$(\mathcal{L}_0 \vee \mathcal{J}_G, \mathcal{R})$ die Verträglichkeitsbedingung (VBI) aus 1.7 erfüllt),

gibt es $x \in X$ mit $Ux(U_n \cap G) \in \mathcal{F}$, und man erhält

$$q_D(UxE(U \cap G)) \stackrel{(2)}{\supset} q_D(Ux(U_n \cap G)) \in q_D(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}.$$

Weil nun $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter und E endlich ist, existiert $e \in E$ mit

$$q_D(Uxe(U \cap G)) \in \mathcal{F}. \quad \text{Also ist } \mathcal{F} \text{ ein } \mathcal{Q}(G)/D\text{-Cauchyfilter (Lemma 2.2(b))}.$$

Da G als Untergruppe von X Bedingung (B) erfüllt und $D \leq G$, folgt aus Satz 2.3, daß $\mathcal{F}$ sogar ein $\mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter ist.

Mit Hilfe von Lemma 3.2(b) läßt sich Satz 3.4 für den Fall ' $D=\{e\}$ ' weiter verallgemeinern:

3.5 Satz

Sei $(X, \mathcal{T})$ eine topologische Gruppe und G eine inframetrisierbare Untergruppe von X .

Gibt es nun eine Gruppentopologie $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{S}|_G = \mathcal{T}|_G$,

so daß $(X, \mathcal{S})$ Bedingung (B) erfüllt, so läßt sich jeder $\mathcal{R}_\mathcal{T}/G$ -Cauchyfilter auf X/G zu einem $\mathcal{R}_\mathcal{S}$ -Cauchyfilter auf X liften;

insbesondere ist $\mathcal{R}_\mathcal{S}/G$ vollständig, falls $(X, \mathcal{T})$ vollständig ist.

Um die Liftbarkeit von $\mathcal{R}/G$ -Cauchyfolgen zu $\mathcal{R}$ -Cauchyfolgen untersuchen zu können, werden zunächst zwei Hilfssätze formuliert.

3.6 Lemma

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein uniformer Raum, R eine mit $\mathcal{W}$ verträgliche Äquivalenzrelation und $q: X \longrightarrow X/R$ die Quotientenabbildung. $\mathcal{G}$ sei ein $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter auf X/R , der sich zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X liften läßt. Dann gibt es einen $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F} \subset \mathcal{f}$ auf X mit $q(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$.

Beweis

Wegen $q(\mathcal{f}) \supset \mathcal{G}$ wird durch $\mathcal{F} := \langle \{M(A) \cap q^{-1}(B) : M \in \mathcal{W}, A \in \mathcal{f}, B \in \mathcal{G}\} \rangle$ ein Filter auf X definiert, der gröber als $\mathcal{f}$ ist. $\mathcal{F}$ ist ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter, da er feiner als der zu $\mathcal{f}$ gehörige minimale $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist (s. U.S., 10.2). Offensichtlich gilt $q(\mathcal{F}) \supset \mathcal{G}$; damit bleibt noch die umgekehrte Inklusion zu zeigen:

Sei $M \in \mathcal{W}$, $A \in \mathcal{f}$ und $B \in \mathcal{G}$ gegeben. Da $\mathcal{G}$ ein $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter und R mit $\mathcal{W}$ verträglich ist, gibt es $C \in \mathcal{G}$ mit $q(M(x)) \in \mathcal{G}$ ($x \in q^{-1}(C)$). Wählt man nun $a \in q^{-1}(C) \cap A$ ($q(\mathcal{f}) \supset \mathcal{G}$), so erhält man

$$q(M(A) \cap q^{-1}(B)) = q(M(A)) \cap B \supset q(M(a)) \cap B \in \mathcal{G}.$$

3.7 Lemma

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein halbmétrisierbarer uniformer Raum, R eine Äquivalenzrelation auf X und $q: X \longrightarrow X/R$ die Quotientenabbildung. $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge in X/R , so daß der zu dieser Folge gehörige Elementarfilter $\mathcal{G}$ zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X mit $q(\mathcal{f}) = \mathcal{G}$ geliftet werden kann. Dann läßt sich die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu einer $\mathcal{W}$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X liften, so daß der zu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Elementarfilter feiner als der zu $\mathcal{f}$ gehörige minimale $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist.

Beweis

Sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathcal{W}$ ($\mathcal{W}$ halbmétrisierbar). Die Mengen $E(n) := \{s_i : i \geq n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) bilden eine Filterbasis von $\mathcal{G}$.

Es wird nun induktiv eine monoton fallende Folge $A_m \in \mathcal{f}$ ($m \in \mathbb{N}$) und eine streng monoton steigende Folge $k_m \in \mathbb{N}$ ($m \in \mathbb{N}$) mit

$$(1) \quad q(A_m) = E(k_m) \quad (m \in \mathbb{N}) \quad \text{und}$$

$$(2) \quad A_m \times A_m \subset M_m \quad (m \in \mathbb{N})$$

konstruiert:

Sei $m \in \mathbb{N}$ gegeben und $A_1, \dots, A_{m-1}$ und $k_1, \dots, k_{m-1}$ für den Fall $m \geq 2$ schon konstruiert. Da $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist, gibt es $A \in \mathcal{F}$ mit $A \times A \subset M_m$, wobei im Fall $m \geq 2$ $A \subset A_{m-1}$ gewählt werden kann. Wegen $q(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$ gibt es $k_m \in \mathbb{N}$ mit $k_m > k_{m-1}$ für $m \geq 2$, sowie $B \in \mathcal{F}$, so daß $q(A) \supset E(k_m) \supset q(B)$. Somit kann man $A_m \in \mathcal{F}$, $A_m \subset A$, wählen mit $q(A_m) = E(k_m)$. Wegen $A_m \subset A$ gilt $A_m \times A_m \subset M_m$.

Für $n < k_1$ sei x_n ein beliebiges Element aus s_n . Für $n \geq k_1$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $k_m \leq n < k_{m+1}$ ($(k_m)_{m \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigend). Wegen (1) kann man nun $x_n \in A_m$ wählen mit $q(x_n) = s_n$.

Der zur Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Elementarfilter ist feiner als der von den Mengen A_m ($m \in \mathbb{N}$) erzeugte Filter $\mathcal{H}$ ($(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ monoton fallend) und damit feiner als der zu $\mathcal{F}$ gehörige minimale $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ($\mathcal{H}$ ist $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter nach (2); $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$).

3.8 Satz

Sei X eine topologische Gruppe, die eine Gruppenvervollständigung besitzt, und G eine halbmétrisierbare Untergruppe von X .

Dann gilt:

Eine $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfolge in X/G kann zu einer $\mathbb{R}$ -Cauchyfolge in X geliftet werden, wenn sich der zur Folge gehörige Elementarfilter zu einem $\mathbb{R}$ -Cauchyfilter auf X liften läßt.

Bemerkung

Die Beispiele 2.12 (b) und (c) (s. S. 29ff) zeigen, daß die Aussage des Satzes nicht mehr gilt, wenn die Voraussetzung einer Gruppenvervollständigung für X ersatzlos gestrichen wird.

Beweis

Sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfolge in X/G , so daß sich der dazugehörige Elementarfilter $\mathcal{G}$ zu einem $\mathbb{R}$ -Cauchyfilter auf X liften läßt. Nach Lemma 3.6 existiert dann ein $\mathbb{R}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X mit $q(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$ (wobei $q = q_G$). Da G halbmétrisierbar ist, gibt es eine

halbmetrisierbare Uniformität $\mathfrak{U}_0 \subset \mathfrak{U}$ mit linksinvarianter Basis, so daß $\mathfrak{U}_0 \vee \mathfrak{J}_G = \mathfrak{U} \vee \mathfrak{J}_G$. Weil X eine Gruppenvervollständigung besitzt, ist $\mathfrak{J}$ ein $\mathfrak{U}$ - und damit insbesondere ein $\mathfrak{U}_0$ -Cauchyfilter. Aus Lemma 3.7 folgt nun, daß sich $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu einer $\mathfrak{U}_0$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X liften läßt. Nach Lemma 3.2 (a) ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{O}_f(G)$ -Cauchyfolge. Da G als halbmetrisierbare topologische Gruppe mit Gruppenvervollständigung Bedingung (B) erfüllt (Lemma 1.2 (b)), folgt aus Satz 2.3, daß $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar eine $\mathcal{R}$ -Cauchyfolge ist.

Das nun folgende Lemma wird in Beispiel 3.10 benötigt.

3.9 Lemma

Sei $(X, \mathcal{W})$ ein uniformer Raum, so daß $\mathcal{W}$ abzählbar durchschnitts-stabil ist (d.h. für jede Folge $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{W}$ gilt $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n \in \mathcal{W}$). Dann gilt:

- (a) Ist R eine Äquivalenzrelation auf X , so daß die Mengen $(q_R \times q_R)(M)$ ($M \in \mathcal{W}$) eine Basis von $\mathcal{W}/R$ bilden (dies ist z.B. dann der Fall, wenn R mit $\mathcal{W}$ verträglich ist (U.S., 4.10)), so ist auch $\mathcal{W}/R$ abzählbar durchschnittsstabil.
- (b) $(X, \mathcal{W})$ ist folgenvollständig.

Beweis

- (a) Für jede Folge $M_n \in \mathcal{W}$ ($n \in \mathbb{N}$) gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (q_R \times q_R)(M_n) \supset (q_R \times q_R)\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} M_n\right) \in \mathcal{W}/R.$$

- (b) Wegen U.S., 0.47, in Verbindung mit Teil (a) des Lemmas kann $\mathcal{W}$ o.E. Hausdorffsch angenommen werden. Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{W}$ -Cauchyfolge in X .

Annahme: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

O.E. kann $x_m \neq x_n$ ($m \neq n$) angenommen werden (U.S., 0.35(b)).

Für $m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, wähle man nun $M_{m,n} \in \mathcal{W}$ mit $x_m \notin M_{m,n}(x_n)$ ($\mathcal{W}$ Hausdorffsch). Für $M := \bigcap_{m \neq n} M_{m,n} \in \mathcal{W}$ gilt $x_m \notin M(x_n)$ ($m \neq n$).

Damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine $\mathcal{W}$ -Cauchyfolge, was einen Widerspruch zur Voraussetzung bedeutet.

3.10 Beispiel

Es wird eine vollständige Hausdorffsche topologische Gruppe $Z := X \times Y$ (X, Y vollst. Hausd. top. Gruppen) und eine diskrete (nicht neutrale) Untergruppe $D < Z$ konstruiert, so daß $(Z/D, \mathbb{R}/D)$ folgenvollständig, aber nicht vollständig ist.

(X wird hierbei für die Unvollständigkeit des Quotienten und Y für die Diskretheit von D verantwortlich sein.)

Bemerkung

Es bleiben folgende Fragen offen:

- Läßt sich ein entsprechendes Beispiel mit neutraler Untergruppe D konstruieren?
- Vererbt sich die Folgenvollständigkeit von einer topologischen Gruppe X stets auf den Quotienten $\mathbb{R}/G$, wenn $G < X$ metrisierbar ist?

I. Konstruktion von X

Die vollständige Hausdorffsche topologische Gruppe X und die damit verbundenen Notationen werden aus U.S., 12.6 Example, übernommen:

$T := [0, \Omega)$ (Ω bezeichne die erste überabzählbare Ordinalzahl),

$G := (\mathbb{Z}_2)^{(T)}$ mit der diskreten Topologie,

$H := \{\pi \in T: \pi \text{ bijektiv, } \{t \in T: \pi(t) \neq t\} \text{ ist endlich}\}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf abzählbaren Teilmengen von T bzgl. der diskreten Uniformität auf T (die Mengen

$V_t := \{\pi \in H: \pi(s) = s \ (s < t)\}$ ($t \in T$)

bilden also eine e -Umgebungsbasis von H),

$\sigma: H \longrightarrow \text{Aut}(G)$, $\pi \longmapsto \sigma_\pi$ mit $\sigma_\pi((g_t)_{t \in T}) := (g_{\pi^{-1}(t)})_{t \in T}$ ($(g_t)_{t \in T} \in G$),

$X := G \overset{\text{top}}{\times}_0 H$,

$\hat{t} := (\delta_{s,t})_{s \in T} \in G$ ($t \in T$) (wobei $\delta_{s,t}$ das Kroneckersymbol bezeichnet).

II. Konstruktion von Y

Die Mengen

$U_t := \prod_{s < t} \{e_H\} \times \prod_{s \geq t} H$ ($t \in T$)

bilden eine e -Umgebungsbasis einer vollständigen Hausdorffschen Gruppentopologie auf H^T (U.S., chap. 8, exercise 3).

Für $t \in T$ bezeichne $pr_t: H^T \longrightarrow H$ die t -te Projektion.

Die Abbildung

$$\tau: H \longrightarrow \text{Aut}(H^T), \quad \pi \longmapsto \tau_\pi, \quad \text{wobei} \quad \tau_\pi((h_t)_{t \in T}) := (h_{\pi^{-1}(t)})_{t \in T} \quad ((h_t)_{t \in T} \in H^T),$$

ist ein wohldefinierter Monomorphismus. Die Operation

$$H \times H^T \longrightarrow H^T, \quad (\pi, \bar{h}) \longmapsto \tau_\pi(\bar{h}),$$

ist stetig:

Sei $\pi \in H$, $\bar{h} = (h_t)_{t \in T} \in H^T$ und $r \in T$ gegeben.

Wähle $s \geq r$ mit $\pi(s) = s$ ($t \geq s$) (Def. von H).

Sei nun $\bar{u} = (u_t)_{t \in T} \in U_s$ und $v \in V_r$ gegeben. Es genügt zu zeigen, daß

$\tau_{v\pi}(\bar{u}\bar{h}) \in U_r \tau_\pi(\bar{h})$. Dies ist erfüllt, denn für $t < r$ gilt:

$$\begin{aligned} pr_t(\tau_{v\pi}(\bar{u}\bar{h})) &= u_{\pi^{-1}(v^{-1}(t))} h_{\pi^{-1}(v^{-1}(t))} = u_{\pi^{-1}(t)} h_{\pi^{-1}(t)} = \\ &= h_{\pi^{-1}(t)} = pr_t(\tau_\pi(\bar{h})). \end{aligned}$$

Damit ist durch $Y := H^T \overset{\text{top}}{\times} H$ eine vollständige Hausdorffsche topologische Gruppe definiert (U.S., 6.15, 12.5).

III. Konstruktion von $D < Z$ ($:= X \times Y$)

$H_0 := \{\pi \in H: \pi(0) = 0\}$ ist eine Untergruppe von H . Für $t \in T$ bezeichne

$j_t: H \longrightarrow H^T$ die kanonische t -te Injektion. Durch

$$D := \{((\sigma, \pi), (j_0(\pi), \pi)) \in Z: \pi \in H_0\}$$

wird eine Untergruppe von Z definiert, denn für $\pi, \rho \in H_0$ gilt:

$$\begin{aligned} ((\sigma, \pi), (j_0(\pi), \pi)) ((\sigma, \rho), (j_0(\rho), \rho))^{-1} &= \\ &= ((\sigma, \pi), (j_0(\pi), \pi)) ((\sigma, \rho^{-1}), (\tau_{\rho^{-1}}(j_0(\rho^{-1})), \rho^{-1})) = \\ &= ((\sigma, \pi)(\sigma, \rho^{-1}), (j_0(\pi), \pi)(j_0(\rho^{-1}), \rho^{-1})) = \\ &= ((\sigma, \pi\rho^{-1}), (j_0(\pi\rho^{-1}), \pi\rho^{-1})) \in D. \end{aligned}$$

D ist diskret, denn für $\pi \in H_0$ gilt:

$$((\sigma, \pi), (j_0(\pi), \pi)) \in X \times (U_1 \times H) \iff j_0(\pi) \in U_1 \iff \pi = e_H.$$

Nun soll noch gezeigt werden, daß D nicht neutral in Z ist:

Annahme: D ist neutral in Z .

Dann ist $\hat{0} := \{(\pi, j_0(\pi)) \in Y: \pi \in H_0\}$ neutral in Y . Damit gibt es $t \in T$ mit

$$\begin{aligned} \{(j_0(\pi)\tau_\pi(u), \pi v): \pi \in H_0, u \in U_t, v \in V_t\} &= \hat{D}(U_t \times V_t) \subset (U_2 \times V_2)\hat{D} = \\ &= \{(u\tau_v(j_0(\pi)), v\pi): u \in U_2, v \in V_2, \pi \in H_0\} = \\ &= \{(uj_0(\pi), v\pi): u \in U_2, v \in V_2, \pi \in H_0\}. \end{aligned}$$

Wendet man nun die Projektion

$$H^T \times H \longrightarrow H, ((h_t)_{t \in T}, \pi) \longmapsto h_1,$$

auf die linke und rechte Seite der obigen Inklusion an, so erhält man

$$\{\text{pr}_1(\tau_\pi(u)) \in H: \pi \in H_0, u \in U_t\} \subset \{e_H\}.$$

Da die linke Seite der Inklusion gleich H ist, ergibt sich ein Widerspruch.

IV. $(Z/D, \mathcal{R}/D)$ ist folgenvollständig

Da $\mathcal{U}_e(Z)$ abzählbar durchschnittsstabil ist (die Mengen $\{0\} \times V_t \times U_t \times V_t$ ($t \in [0, \Omega)$) bilden eine e -Umgebungsbasis von Z), gilt dies auch für die Uniformität $\mathcal{R}_Z$. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.9.

V. $(Z/D, \mathcal{R}/D)$ ist nicht vollständig

Für $r, s \in T$ sei π_{rs} diejenige Permutation von T , die die Elemente r und s vertauscht und alle übrigen Elemente aus T fest läßt.

Offenbar gilt $\tau_{\pi_{rs}}(j_s(\pi)) = j_r(\pi)$ ($r, s \in T, \pi \in H$).

Für $t \in T$ definiere man

$$z_t := ((\hat{t}, e), (e, \pi_{t0})) \in Z.$$

Es soll nun gezeigt werden, daß $(q_D(z_t))_{t \in T}$ ein $\mathcal{R}/D$ -Cauchynetz in Z/D ist:

Sei $t \in T$ vorgegeben, und sei $U := \{0\} \times V_t \times U_t \times V_t \in \mathcal{U}_e(Z)$.

Es genügt zu zeigen, daß

$$q_D(z_r) \in U \cdot q_D(z_s) \quad (r, s > t)$$

oder, äquivalent dazu,

$$z_r D z_s^{-1} \cap U \neq \emptyset \quad (r, s > t).$$

Letzteres ist erfüllt, denn für $r, s > t$ gilt:

$$\begin{aligned} z_r D z_s^{-1} &\ni ((\hat{r}, e), (e, \pi_{r0})) ((\sigma, \pi_{rs}), (j_0(\pi_{rs}), \pi_{rs})) ((-\hat{s}, e), (e, \pi_{s0})) = \\ &= ((\hat{r}, e)(\sigma, \pi_{rs})(-\hat{s}, e), (e, \pi_{r0})(j_0(\pi_{rs}), \pi_{rs})(e, \pi_{s0})) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= ((\hat{r}, \pi_{rs})(-\hat{s}, e), (\tau_{\pi_{r0}}(j_0(\pi_{rs})), \pi_{r0}\pi_{rs})(e, \pi_{s0})) = \\
 &= ((\hat{r} - \sigma_{\pi_{rs}}(\hat{s}), \pi_{rs}), (j_r(\pi_{rs}), \pi_{r0}\pi_{rs}\pi_{s0})) = \\
 &= ((\sigma, \pi_{rs}), (j_r(\pi_{rs}), \pi_{rs})) \in \\
 &\in \{0\} \times \bigvee_{\min(r,s)} \times U_r \times \bigvee_{\min(r,s)} \subset U.
 \end{aligned}$$

Annahme: $(q_D(z_t))_{t \in T}$ konvergiert in Z/D .

Mit $E := \{0\} \times H \times Y$ erhält man eine Untergruppe von Z , so daß $D < E$; damit konvergiert $(q_E(z_t))_{t \in T}$ in Z/E . Die Abbildung

$$\tilde{q}: G \longrightarrow Z/E, \quad g \longmapsto ((g, e), (e, e))E,$$

ist ein Homöomorphismus (U.S., 6.17 und chap. 5, exercise 3). Daraus folgt, daß $(\tilde{q}^{-1}(q_E(z_t)))_{t \in T} = (\hat{t})_{t \in T}$ in G konvergiert. Dies ist aber offensichtlich nicht der Fall (G diskret), womit die Annahme falsch ist.

Im letzten Teil des Kapitels werden nun als Untergruppen topologische direkte Produkte betrachtet. Zunächst sollen die dafür benötigten Bezeichnungen eingeführt werden.

3.11 Definition

Sei X eine topologische Gruppe. Für $i \in I$ (I Menge) seien Untergruppen $D_i \leq_n G_i < X$ gegeben, so daß das innere topologische direkte Produkt $G := \bigotimes_{i \in I} G_i$ bzgl. eines (fest gewählten) topologischen Isomorphismus $k: \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow G$ existiert. Sei $D := \bigotimes_{i \in I} D_i$, ferner sei

$$T_J := \left(\bigotimes_{i \in J} D_i \right) \times \left(\bigotimes_{i \notin J} G_i \right) \quad (J \subset I),$$

$$T_i := T_{\{i\}} \quad (i \in I).$$

Damit gilt $T_\emptyset = G$, $T_I = D$ und $T_J \leq_n G$ ($J \subset I$).

Für $J \subset K \subset I$ definiere man

$$q_{JK}: X/T_K \longrightarrow X/T_J, \quad xT_K \longmapsto xT_J,$$

$$q_J := q_{JI}: X/D \longrightarrow X/T_J, \quad \text{sowie} \quad \hat{q} := q_\emptyset.$$

Es gilt also $q_{JK} \circ q_{KL} = q_{JL}$ ($J \subset K \subset L \subset I$).

Für $i \in I$ sei

$$q_i := q_{\{i\}}: X/D \longrightarrow X/T_i \quad \text{und}$$

$$p_i := q_{\emptyset \setminus \{i\}}: X/T_i \longrightarrow X/G \quad ,$$

$$\text{somit gilt} \quad \hat{q} = p_i \circ q_i \quad .$$

Im folgenden Satz wird das Analogon zu U.S., 11.22, für den Fall der Rechtsuniformität formuliert.

3.12 Satz

Es sei die Situation von 3.11 gegeben und $\mathcal{Q}_i := \mathcal{Q}_i(G)$. Für $i \in I$ gelte die Bedingung

(B_i) Sind D' , G' neutrale Untergruppen von G , $D < D' < G' < G$, so daß $(G'/D', \mathcal{P}_{G'}/D')$ uniform äquivalent zu $(G_i/D_i, \mathcal{P}_{G_i}/D_i)$ ist, so läßt sich jeder $\mathcal{Q}_i/G'$ -Cauchyfilter auf X/G' (bzgl. der kanonischen Abbildung $X/D' \longrightarrow X/G'$) zu einem $\mathcal{Q}_i/D'$ -Cauchyfilter auf X/D' liften.

Dann läßt sich jeder $\mathcal{Q}/G (= \mathcal{R}/G)$ -Cauchyfilter $\mathcal{Q}$ auf X/G zu einem $\mathcal{Q}/D$ -Cauchyfilter $\mathcal{f}$ auf X/D liften.

Bemerkungen

- (a) Erfüllt G Bedingung (B) aus 1.1, so kann im Satz $\mathcal{Q}$ durch $\mathcal{R}$ ersetzt werden (2.3).
- (b) Die Bedingungen (B_i) ($i \in I$) sind nach Satz 3.4 und Teil (a) der Bemerkung erfüllt, falls die Uniformitäten $\mathcal{P}_{G_i}/D_i$ ($i \in I$) inframetrisierbar sind und X (und damit auch G (1.3)) Bedingung (B) erfüllt.

Beweis

Auf der nichtleeren Menge

$$\mathcal{M} := \{ \mathcal{f} : \exists J = J(\mathcal{f}) \subset I \text{ mit } \{i \in I : D_i = G_i\} \subset J : \\ \mathcal{f} \text{ ist } \mathcal{Q}/T_J\text{-Cauchyfilter auf } X/T_J \text{ und } q_{\emptyset J}(\mathcal{f}) \supset \mathcal{Q} \}$$

wird durch

$$\mathcal{f}' \succ \mathcal{f} \quad :\Longleftrightarrow \quad J(\mathcal{f}') \supset J(\mathcal{f}) \text{ und } q_{J(\mathcal{f})J(\mathcal{f}')}(\mathcal{f}') \supset \mathcal{f} \quad (\mathcal{f}, \mathcal{f}' \in \mathcal{M})$$

eine Ordnung definiert.

Es soll nun gezeigt werden, daß $\mathcal{M}$ induktiv geordnet ist:

Sei $\mathcal{K}$ eine nichtleere total geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$. Definiert man

$$K := \bigcup_{\mathcal{J} \in \mathcal{K}} J(\mathcal{J}) \quad \text{und} \quad \mathcal{B} := \bigcup_{\mathcal{J} \in \mathcal{K}} q_J^{-1}(\mathcal{J})K(\mathcal{J}),$$

so ist $\mathcal{B}$ Basis eines Filters $\hat{\mathcal{J}}$ auf X/T_K mit $q_{J(\mathcal{J})K}(\hat{\mathcal{J}}) \supset \mathcal{J}$ ($\mathcal{J} \in \mathcal{K}$) und damit $q_{\emptyset K}(\hat{\mathcal{J}}) \supset \mathcal{Q}$ (vgl. U.S., Beweis zu 11.22).

Es genügt zu zeigen, daß $\hat{\mathcal{J}}$ ein $\mathcal{Q}/T_K$ -Cauchyfilter ist.

Sei dazu $U \in \mathcal{U}_e(X)$ vorgegeben. Gesucht ist $x \in X$ mit

$q_{T_K}(Ux(U \cap G)^2) \in \hat{\mathcal{J}}$ (2.2 (b)). Da $k: \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow G$ ein topologischer Isomorphismus ist, gibt es $E \subset I$ endlich mit

$$(1) \quad \bigcap_{i \in E} G_i \subset U \cap G.$$

Da $\mathcal{K}$ total geordnet ist, existiert $\mathcal{J} \in \mathcal{K}$ mit

$$(2) \quad J := J(\mathcal{J}) \supset E \cap K.$$

Weil $\mathcal{J}$ ein $\mathcal{Q}/T_J$ -Cauchyfilter auf X/T_J ist, kann man $x \in X$ mit

$$(3) \quad A := q_{T_J}(Ux(U \cap G)) \in \mathcal{J}$$

wählen (2.2 (b)). Es gilt

$$(4) \quad T_J \stackrel{(1)}{\subset} T_{E \cap K} = T_E T_K = \left(\bigcap_{i \in E} G_i \right) T_K.$$

Damit erhält man insgesamt

$$\hat{\mathcal{J}} \stackrel{(1)}{\supset} q_{JK}^{-1}(A) = q_{T_K}(Ux(U \cap G)T_J) \stackrel{(4)(3)}{\subset} q_{T_K}(Ux(U \cap G)^2).$$

Nach dem Zornschen Lemma enthält $\mathcal{M}$ ein maximales Element $\mathcal{J}$. Zum Beweis des Satzes genügt es nun zu zeigen, daß $J(\mathcal{J}) = I$ (denn daraus folgt, daß $\mathcal{J}$ ein $\mathcal{Q}/D$ -Cauchyfilter mit $\hat{\mathcal{Q}}(\mathcal{J}) \supset \mathcal{Q}$ ist).

Annahme: Es existiert $\kappa \in I \setminus J(\mathcal{J})$.

Gemäß Bedingung (B_κ) mit $D' := T_{J(\mathcal{J}) \cup \{\kappa\}}$ und $G' := T_{J(\mathcal{J})}$ läßt sich $\mathcal{J}$ dann zu einem $\mathcal{Q}/D'$ -Cauchyfilter auf X/D' liften, was im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{J}$ steht.

Während in diesem Satz die Existenz eines gelifteten $\mathcal{Q}/D$ -Cauchyfilters mit dem Zornschen Lemma gezeigt wurde, liefert der nächste Satz eine genauere Strukturbeschreibung des gelifteten Filters.

3.13 Satz

Es sei die Situation von 3.11 mit $I \neq \emptyset$ gegeben. $\mathcal{W}$ sei die Initialuniformität auf X/D bzgl. der Abbildungen $q_1: X/D \longrightarrow (X/T_1, \mathcal{R}/T_1)$ ($1 \in I$). Dann gilt:

(a) Ist $\mathcal{Q}$ ein $\mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter auf X/G und ist für $1 \in I$ ein $\mathcal{R}/T_1$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}_1$ auf X/T_1 gegeben mit $p_1(\mathcal{F}_1) = \mathcal{Q}$ (s. Lemma 3.6), so wird durch

$$\mathcal{F} := \langle \{ \bigcap_{1 \in E} \bar{q}_1^{-1}(F_1) : E \subset I \text{ endlich, } F_1 \in \mathcal{F}_1 (1 \in E) \} \rangle$$

ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter auf X/D definiert, so daß $\hat{q}(\mathcal{F}) \supset \mathcal{Q}$.

(b) Ist $(X/T_1, \mathcal{R}/T_1)$ für $1 \in I$ vollständig, so ist jeder $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X/D ein $\mathcal{Q}_1(G)/D$ -Cauchyfilter.

Bemerkung

In Teil (b) wird vorausgesetzt, daß die Quotienten $(X/T_1, \mathcal{R}/T_1)$ ($1 \in I$) vollständig sind, und damit ist Satz 3.13 keine Alternative, sondern nur eine Ergänzung zu Satz 3.12. Günstiger liegen die Verhältnisse in der entsprechenden Situation mit $\mathcal{L}$ anstelle von $\mathcal{R}$ (wobei zusätzlich ' D, G neutral in X ' vorausgesetzt wird): Hier konnte W. Roelcke (im Anschluß an D. Wigner, Theorem 3) nachweisen, daß eine dem Satz 3.13(a) entsprechende Aussage gilt und $\mathcal{L}/D$ mit der Initialuniformität auf X/D bzgl. der Abbildungen $q_1: X/D \longrightarrow (X/T_1, \mathcal{L}/T_1)$ ($1 \in I$) übereinstimmt. (Dadurch erhält man insgesamt eine leichte Verschärfung von U.S., 11.22.) Beispiel 3.14 wird zeigen, daß in der Situation von 3.13 i.a. $\mathcal{W}$ nicht mit $\mathcal{R}/D$ übereinstimmt und nicht einmal feiner als $\mathcal{Q}_1(G)/D$ ist ($\mathcal{W} \subset \mathcal{R}/D$ ist stets erfüllt).

Ob Teil (b) des Satzes auch ohne Vollständigkeitsvoraussetzung an die Quotienten $(X/T_1, \mathcal{R}/T_1)$ ($1 \in I$) gilt, bleibt offen.

Beweis von 3.13

(a) (gemäß W. Roelcke)

Für $E \subset I$ endlich und $F_1 \in \mathcal{F}_1$ ($1 \in E$) gilt $\bigcap_{1 \in E} \bar{q}_1^{-1}(F_1) \neq \emptyset$:

Wegen $p_1(F_1) \in \mathcal{Q}$ ($1 \in E$) gibt es $s \in \bigcap_{1 \in E} p_1(F_1)$. Man wähle nun

$x \in s$ beliebig und $f_1 \in F_1$ mit $s = p_1(f_1)$ ($1 \in E$). Für $1 \in E$ gibt es dann $g_1 \in G_1$ mit $x g_1 T_1 = f_1$. Definiert man $y := x(\bigcap_{1 \in E} g_1)^D$, so erhält man

$$q_1(y) = x(\prod_{l \in E} g_l)T_l = xg_lT_l = f_l \quad (l \in E), \quad \text{und damit} \\ y \in \bigcap_{l \in E} \bar{q}_l^{-1}(F_l).$$

Somit wird durch $\mathcal{f}$ ein Filter auf X/D definiert, der wegen $q_l(\mathcal{f}) \supset \mathcal{f}_l \quad (l \in I)$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist (U.S., 0.37). Offensichtlich gilt $\hat{q}(\mathcal{f}) \supset \mathcal{U} \quad (I \neq \emptyset)$.

(b) Sei $U \in \mathcal{U}_e(X)$ gegeben. Gesucht ist $A \in \mathcal{f}$ und $x \in X$ mit $A \subset q_D(Ux(U \cap G)^2) \quad (\text{s. 2.2 (b)})$.

Da G ein topologisches direktes Produkt ist und $I \neq \emptyset$, gibt es eine nichtleere endliche Teilmenge $E \subset I$ mit

$$(1) \quad \bigcap_{l \in E} G_l \subset U \cap G.$$

Sei $\kappa \in E$ fest und $\hat{E} := E \setminus \{\kappa\}$. Da die Projektionen

$$\pi_l := \kappa \circ \text{pr}_l \circ \kappa^{-1} \quad (l \in I) \text{ stetig sind, gibt es } V = V^{-1} \in \mathcal{U}_e(X) \text{ mit}$$

$$(2) \quad \prod_{l \in \hat{E}} \pi_l(V^2 \cap G) \subset U \cap G.$$

Da $\mathcal{f}$ ein $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter ist, wird für $l \in I$ durch $\mathcal{f}_l := q_l(\mathcal{f})$ ein $\mathcal{R}/T_l$ -Cauchyfilter auf X/T_l definiert (U.S., 0.37). Somit existiert für $l \in E$ ein $x_l \in X$ mit

$$(3) \quad \mathcal{f}_l \longrightarrow q_{T_l}(x_l).$$

Daraus und aus der Definition von $\mathcal{f}_l \quad (l \in E)$ folgt

$$\forall l \in \hat{E} \quad \forall U \in \mathcal{U}_e(X): Ux_lT_l \cap Ux_\kappa T_\kappa \neq \emptyset$$

und damit

$$x_\kappa^{-1}x_l \in \bar{G} \quad (l \in \hat{E}).$$

Für $l \in \hat{E}$ wähle man $v_l \in V$ mit $x_\kappa^{-1}x_lv_l \in G$ und definiere

$$(4) \quad g := \prod_{l \in \hat{E}} \pi_l(x_\kappa^{-1}x_lv_l) \in G \quad \text{und} \quad x := x_\kappa g.$$

Man wähle nun $W \in \mathcal{U}_e(X)$, $W \subset U$, mit

$$(5) \quad W^{-1}Wx_l \subset x_lv_l \quad (l \in \hat{E}).$$

Wegen (3) und $q_l(\mathcal{f}) = \mathcal{f}_l \quad (l \in E)$ gibt es $A \in \mathcal{f}$ mit

$$(6) \quad A \subset q_D(Wx_lT_l) \quad (l \in E).$$

Sei nun $a \in A$ gegeben; wähle $\hat{a} \in a$ beliebig. Wegen (6) und $T_l = T_l D \quad (l \in I)$ gibt es für $l \in E$ Elemente $w_l \in W$, $t_l \in T_l$ mit

$$(7) \quad \hat{a} = w_1 x_1 t_1 .$$

Für $1 \in \hat{E}$ gilt nun

$$t_K \stackrel{(7)}{=} x_K^{-1} w_K^{-1} w_1 x_1 t_1 \stackrel{(5)}{=} x_K^{-1} x_1 v t_1 = x_K^{-1} x_1 v_1 v^2 t_1$$

und damit

$$(8) \quad \pi_1(t_K) \in \pi_1(x_K^{-1} x_1 v_1) \pi_1(v^2 \cap G) D_1 .$$

Es folgt

$$(9) \quad t_K \in \bigcap_{1 \in \hat{E}} \pi_1(t_K) T_E \stackrel{(8)}{\subseteq} \left(\bigcap_{1 \in \hat{E}} \pi_1(x_K^{-1} x_1 v_1) \right) \left(\bigcap_{1 \in \hat{E}} \pi_1(v^2 \cap G) \right) T_E \subseteq \\ \stackrel{(4)(2)}{\subseteq} g(U \cap G) T_E = g(U \cap G) \left(\bigcap_{1 \in E} G_1 \right) D \stackrel{(1)}{\subseteq} g(U \cap G)^2 D .$$

Insgesamt erhält man

$$a \stackrel{(7)}{\in} q_D(w x_K t_K) \stackrel{(9)(4)}{\subseteq} q_D(w x(U \cap G)^2) \subseteq q_D(U x(U \cap G)^2)$$

und, da $a \in A$ beliebig gewählt war, $A \subseteq q_D(U x(U \cap G)^2)$.

3.14 Beispiel

Durch $X := \mathbb{R}^2 \times_{\mathcal{O}} GL(2, \mathbb{R})$ (wobei $GL(2, \mathbb{R})$ in kanonischer Weise auf $\mathbb{R}^2$ operiert und $\mathbb{R}^2$ und $GL(2, \mathbb{R})$ mit den üblichen Topologien versehen sind) wird ein topologisches semidirektes Produkt definiert. Es sei

$$G_1 := \mathbb{R} \times \{0\} \times \{1\} < X ,$$

$$G_2 := \{0\} \times \mathbb{R} \times \{1\} < X \text{ und}$$

$$G := G_1 \overset{top}{\rtimes} G_2 < X .$$

Mit $\mathcal{W}$ werde die Initialuniformität bzgl. der Quotientenabbildungen

$$q_i: X \longrightarrow (X/G_i, \mathcal{R}/G_i) \quad (i \in \{1, 2\}) \quad \text{bezeichnet. Damit gilt } \mathcal{W} \subset \mathcal{R} .$$

Es wird nun gezeigt, daß $\mathcal{W}$ nicht feiner als $\mathcal{Q}(G) (\subset \mathcal{R})$ ist (insbesondere folgt dann $\mathcal{W} \neq \mathcal{R}$):

$$\text{Annahme: } \mathcal{W} \supset \mathcal{Q}(G) .$$

Dann gibt es zu $U := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : -\frac{1}{3} < a, b < \frac{1}{3} \right\} \times GL(2, \mathbb{R}) \in \mathcal{U}_e(X)$ eine

Umgebung $V \in \mathcal{U}_e(X)$ mit

$$(1) \quad \forall x \in X: \quad v x G_1 \cap v x G_2 \subseteq U x (U \cap G) .$$

Man wähle nun $\varepsilon > 0$ so, daß $v_1 := \left(\begin{pmatrix} -\varepsilon \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right) \in V$, und definiere

$v_2 := e_x \in V$, $x := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $g_1 := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, 1 \right) \in G_1$ und

$g_2 := \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \in G_2$.

Dann gilt $v_1 x g_1 x^{-1} = v_2 x g_2 x^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right)$,

und aus (1) folgt

$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \in Ux(U \cap G)x^{-1} = U\left(\begin{pmatrix} \varepsilon a \\ a+b \end{pmatrix}, 1 \right) : -\frac{1}{3} < a, b < \frac{1}{3} \}$.

Dies wiederum impliziert

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon a \\ a+b \end{pmatrix} : -\frac{1}{3} < a, b, c, d < \frac{1}{3} \right\}$. Widerspruch!

4. Kapitel Vollständigkeit von Quotienten des Supremums der Links- und Rechtsuniformität einer topologischen Gruppe.

In diesem Kapitel soll für eine topologische Gruppe X mit Untergruppe G das Supremum $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$ auf Vollständigkeit hin untersucht werden. Da $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$ gröber als $(\mathcal{L} \vee \mathcal{R})/G$ ist und beide Uniformitäten die Quotiententopologie auf X/G induzieren, ist mit $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$ auch $(\mathcal{L} \vee \mathcal{R})/G$ vollständig (vgl. U.S., Remark hinter 11.21).

Der folgende Satz baut auf die in den vorangegangenen Kapiteln erzielten Ergebnisse auf.

4.1 Satz

Sei X eine topologische Gruppe und $D < G < X$, so daß D neutral in X ist und G (es genügt auch $(\mathcal{R}_G/D, \mathcal{L}_G/D)$ (s. 1.12)) Bedingung (B) aus 1.1 erfüllt. Dann gilt:

Läßt sich ein $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter $\mathcal{O}$ auf X/G zu einem $\mathcal{L}/D$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X/D liften, so ist $\mathcal{F}$ schon ein $\mathcal{L}/D \vee \mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter.

Beweis

$\mathcal{F}$ ist ein $\mathcal{L}/D \vee (\mathcal{J}_G/D \wedge \mathcal{R}/D)$ -Cauchyfilter. Da $(\mathcal{J}_G/D, \mathcal{R}/D)$ der Verträglichkeitsbedingung (VB1) aus 1.7 genügt ($(\mathcal{J}_G, \mathcal{R})$ erfüllt (VB1) gemäß 1.7; U.S., 4.10 Remark (2)) und $(\mathcal{L}/D, \mathcal{R}/D)$ die Bedingung (10) aus 1.2 erfüllt (U.S., 9.20), folgt aus Lemma 3.1(b), daß $\mathcal{F}$ ein $(\mathcal{L}/D \vee \mathcal{J}_G/D) \wedge \mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter und damit ein $\mathcal{O}_{\mathcal{F}(G)/D}$ -Cauchyfilter ist ($D \leq_n X$; 2.2(c)).

Satz 2.3 impliziert nun, daß $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{R}/D$ -, also insgesamt ein $\mathcal{L}/D \vee \mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter ist.

Bemerkungen

- (a) Die Liftungsvoraussetzung im Satz ist beispielsweise dann erfüllt, wenn $\mathcal{L}_G/D$ inframetrisierbar und G neutral in X ist (U.S., 11.17).
- (b) Der Satz verallgemeinert (im wesentlichen) U.S., 11.21: dort wurde die Inframetrisierbarkeit für X gefordert und nur die Situation $G < X$ behandelt.

- (c) Der Satz gilt nicht mehr, wenn man für G anstatt der Bedingung (B) die Metrisierbarkeit fordert. (Man wähle für X eine metrisierbare topologische Gruppe, die keine Gruppenvervollständigung besitzt (U.S., 10.18(a)), und setze $G=X$, $D=\{e\}$.)

Im folgenden Abschnitt wird (in uniformer Situation) eine spezielle Lif-
tungstechnik für $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$ -Cauchyfilter entwickelt, die unabhängig von
den bisher verwendeten Methoden ist (insbesondere geht Bedingung (B) aus
1.1 nicht ein). Dies ermöglicht dann in Satz 4.5 eine Verallgemeinerung
der Vollständigkeitsaussagen über $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$, die sich bei L.G. Brown
(Theorem 2 in Verbindung mit Theorem 1 und Kor. 3, bzw. auch U.S., 11.34)
und in U.S., 11.21, finden.

4.2 Proposition

Sei X eine Menge und $\mathcal{W}, \mathcal{W}_0$ Uniformitäten auf X , so daß $(\mathcal{W}, \mathcal{W}_0)$
und $(\mathcal{W}_0, \mathcal{W})$ die Bedingung (10) aus Lemma 1.2 erfüllen. R sei eine
mit $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_0$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X und $q: X \rightarrow X/R$
bezeichne die Quotientenabbildung. Seien $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ und $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{W}$ halb-
metrisierbare Uniformitäten auf X und $\mathcal{Q}$ ein $\mathcal{W}/R \vee \mathcal{W}_0/R$ -Cauchy-
filter auf X/R .

Dann läßt sich $\mathcal{Q}$ bzgl. q zu einem $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X
liften, so daß der zu $\mathcal{F}$ gehörige minimale $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}_0$ zu
einem $\mathcal{W}_0$ - (und damit $\mathcal{W}_0 \vee \mathcal{W}_0$ -) Cauchyfilter $\mathcal{F}$ verfeinert werden
kann.

Beweis

Sei $(\hat{M}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathcal{W}_0$ und $(\hat{N}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Basis von $\mathcal{W}_0$, so
daß

$$(1) \quad \hat{M}_{n+1}^3 \subset \hat{M}_n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

$$(2) \quad \hat{N}_{n+1}^3 \subset \hat{N}_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Es soll nun induktiv eine monoton fallende Folge $A_n \in \mathcal{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$) und Folgen
 $x_n, z_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$), $M_n \in \mathcal{W}$ ($n \in \mathbb{N}$) und $N_n \in \mathcal{W}_0$ ($n \in \mathbb{N}$) konstruiert werden,
so daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(3)_n \quad N_n \circ \hat{N}_n \circ N_n^{-1} \subset \hat{N}_{n-1} \quad , \quad N_n \subset N_{n-1} \quad , \quad \text{falls } n \geq 2 \quad ,$$

$$(4)_n \quad N_n (M_{n-1}(x_{n-1})) \subset \hat{M}_n(x_{n-1}) \quad , \quad \text{falls } n \geq 2 \quad ,$$

$$(5)_n \quad z_n \in M_{n-1}(x_{n-1}) \quad , \quad \text{falls } n \geq 2 \quad ,$$

$$(6)_n \quad M_n(N_n(z_n)) \subset \hat{N}_n(z_n) \quad ,$$

$$(7)_n \quad \forall x \in X \quad \exists N \in \mathcal{W}: N(M_n(x)) \subset \hat{M}_{n+1}(x) \quad (\text{insbes. also } M_n \subset \hat{M}_{n+1}) \quad ,$$

$$(8)_n \quad x_n \in N_n(z_n) \quad ,$$

$$(9)_n \quad A_n \subset q(M_n(x_n)) \quad .$$

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben und seien $A_1, \dots, A_{n-1}$, $x_1, \dots, x_{n-1}$, $z_1, \dots, z_{n-1}$, $M_1, \dots, M_{n-1}$ und $N_1, \dots, N_{n-1}$ schon gewählt. (Im Fall $n=1$ ist also ohne Voraussetzung zu beginnen.)

Wähle $N_n \in \mathcal{W}$, so daß die Bedingungen $(3)_n$ (beachte (2)), $(4)_n$ (beachte $(7)_{n-1}$, falls $n \geq 2$) und zusätzlich

$$(10) \quad \forall x \in X \quad \exists M \in \mathcal{W}: M(N_n(x)) \subset \hat{N}_n(x)$$

$(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ erfüllt Bedingung (10) aus 1.2) erfüllt sind.

Weil R mit $\mathcal{W}$ verträglich ist, gibt es $N \in \mathcal{W}$ mit

$$(11) \quad N \circ R \subset R \circ N_n \quad .$$

Da $\mathcal{G}$ insbesondere ein $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter (und R mit $\mathcal{W}$ verträglich) ist, existiert $A \in \mathcal{G}$ mit $A \subset A_{n-1}$, falls $n \geq 2$, und $a \in A$, so daß

$$(12) \quad A \subset q(N(a)) \quad .$$

Falls $n=1$, wähle $z_1 \in a$ beliebig. Falls $n \geq 2$, gibt es nach $(9)_{n-1}$

$z_n \in a$ mit $z_n \in M_{n-1}(x_{n-1})$. Damit ist $(5)_n$ erfüllt.

Wegen (10) gibt es zu z_n eine Nachbarschaft $M_n \in \mathcal{W}$, so daß $(6)_n$ erfüllt ist; da $(\mathcal{W}, \mathcal{W})$ die Bedingung (10) aus 1.2 erfüllt, kann M_n außerdem so gewählt werden, daß auch $(7)_n$ erfüllt ist.

Wähle nun $M \in \mathcal{W}$ mit

$$(13) \quad M \circ R \subset R \circ M_n \quad (R \text{ ist mit } \mathcal{W} \text{ verträglich}).$$

Da $\mathcal{G}$ insbesondere ein $\mathcal{W}/R$ -Cauchyfilter ist, gibt es $A_n \in \mathcal{G}$,
 $A_n \subset A$, und $b \in A_n$ mit

$$(14) \quad A_n \subset q(M(b)) .$$

Wegen $z_n \in a$ folgt aus (12)

$$b \subset R \circ N \circ R(z_n) \stackrel{(11)}{\subset} R \circ N_n(z_n) .$$

Also gibt es $x_n \in b$ mit $x_n \in N_n(z_n)$; damit ist $(8)_n$ erfüllt.

$(9)_n$ folgt aus

$$A_n \stackrel{(14)}{\subset} q(M(b)) = q(M \circ R(x_n)) \stackrel{(13)}{\subset} q(M_n(x_n)) .$$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfolge, denn für $n \geq 2$ gilt

$$\begin{aligned} x_{n+1} &\stackrel{(1)}{\subset} N_{n+1}(z_{n+1}) \stackrel{(2)}{\subset} N_{n+1}(M_n(x_n)) \stackrel{(8)}{\subset} N_{n+1}(M_n(N_n(z_n))) \subset \\ &\stackrel{(4)}{\subset} N_{n+1}(\hat{N}_n(z_n)) \stackrel{(10)}{\subset} N_{n+1} \circ \hat{N}_n \circ N_n^{-1}(x_n) \stackrel{(3)}{\subset} \hat{N}_{n-1}(x_n) \end{aligned}$$

und damit für $i > n \geq 3$

$$x_i \in \hat{N}_{i-2} \circ \dots \circ \hat{N}_{n-1}(x_n) \stackrel{(3)}{\subset} \hat{N}_{n-2}(x_n) .$$

$\mathcal{G}$ sei nun der zur $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Elementarfilter.

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \hat{M}_{n+1}(x_{n+1}) &\stackrel{(1)}{\subset} \hat{M}_{n+1}(N_{n+1}(z_{n+1})) \stackrel{(5)}{\subset} \hat{M}_{n+1}(N_{n+1}(M_n(x_n))) \subset \\ &\stackrel{(4)}{\subset} \hat{M}_{n+1} \circ \hat{M}_{n+1}(x_n) \stackrel{(4)}{\subset} \hat{M}_n(x_n) . \end{aligned}$$

Somit bilden die Mengen $\hat{M}_n(x_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Basis eines $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilters $\mathcal{f}_0$ auf X , der ein minimaler $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter ist (für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\hat{M}_{n+1}(\hat{M}_{n+1}(x_{n+1})) \subset \hat{M}_{n+1}(\hat{M}_{n+1}^2(x_n)) \stackrel{(4)}{\subset} \hat{M}_n(x_n) \text{ und größer als } \mathcal{G} \text{ ist.}$$

Für $A \in \mathcal{G}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $(9)_n$ und $M_n \subset \hat{M}_n$ $((7)_n; (1))$
 $q(\hat{M}_n(x_n)) \cap A \neq \emptyset$ und damit $\hat{M}_n(x_n) \cap q^{-1}(A) \neq \emptyset$.

Damit ist der $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\mathcal{f} := \langle \{ \hat{M}_n(x_n) \cap q^{-1}(A) : n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{G} \} \rangle$
 definiert; es gilt offensichtlich $q(\mathcal{f}) \supset \mathcal{G}$ und $\mathcal{f} \supset \mathcal{f}_0$.

Als eine Anwendung von Proposition 4.2 auf halbmétrisierbare Uniformitäten erhält man folgenden Satz:

4.3 Satz

Sei X eine Menge und $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ halbmétrisierbare Uniformitäten auf X , so daß $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ und $(\mathcal{W}, \mathcal{V})$ die Bedingung (10) aus Lemma 1.2 erfüllen. R sei eine mit $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ verträgliche Äquivalenzrelation auf X und $q: X \longrightarrow X/R$ bezeichne die Quotientenabbildung.

Dann läßt sich jede $\mathcal{V}/R \vee \mathcal{W}/R$ -Cauchyfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X/R bzgl. q zu einer $\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X liften; insbesondere ist $\mathcal{V}/R \vee \mathcal{W}/R$ vollständig, wenn $\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$ vollständig ist.

Bemerkungen

- (a) Obwohl in der Situation des Satzes $\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$ halbmétrisierbar ist, läßt sich nicht ohne weiteres U.S., 11.2 (Liftungssatz für halbmétrisierbare uniforme Räume), anwenden, denn aus der Verträglichkeit von R mit $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ folgt i.a. nicht die Verträglichkeit von R mit $\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$ (U.S., 6.21 Example).
- (b) Als Anwendung des Satzes auf topologische Gruppen erhält man (vgl. U.S., Bemerkung hinter 13.34):

Ist X eine halbmétrisierbare topologische Gruppe und $G_n^< X$, so läßt sich jede $\mathcal{L}/G \vee \mathcal{R}/G$ -Cauchyfolge in X/G zu einer $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ -Cauchyfolge in X liften.

Beweis von 4.3

Gemäß Proposition 4.2 (mit $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}$, $\mathcal{W}_0 = \mathcal{W}$) läßt sich der zur Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Elementarfilter $\mathcal{Q}$ zu einem $\mathcal{V}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X liften, so daß der zu $\mathcal{F}$ gehörige minimale $\mathcal{V}$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}_0$ zu einem $\mathcal{W}$ -Cauchyfilter verfeinert werden kann; wegen Lemma 3.6 kann $q(\mathcal{F}) = \mathcal{Q}$ angenommen werden. Somit läßt sich nach Lemma 3.7 die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu einer $\mathcal{V}$ -Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liften, so daß der zu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Elementarfilter feiner als $\mathcal{F}_0$ ist. Da $(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ Bedingung (10) aus 1.2 erfüllt, ist $\mathcal{F}_0$ ein $\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$ -Cauchyfilter und folglich $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine $\mathcal{V} \vee \mathcal{W}$ -Cauchyfolge.

4.4 Lemma

Sei X eine topologische Gruppe, $G < X$ und $\mathcal{F}$ ein $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfilter auf X/G . Sei $U \in \mathcal{U}_e(X)$ gegeben. Dann gibt es $V \in \mathcal{U}_e(X)$ und $A \in \mathcal{F}$ mit

$$\forall a \in A \quad \exists x \in a: xV \subset Ux.$$

Beweis

Wähle $W \in \mathcal{U}_e(X)$ mit $W^2W^{-1} \subset U$. Da $\mathcal{F}$ ein $\mathbb{R}/G$ -Cauchyfilter (und R_G mit $\mathbb{R}$ verträglich) ist, gibt es $z \in X$ und $A \in \mathcal{F}$ mit

$$(1) \quad A \subset W \cdot q_G(z) \quad (\text{zur Def. der Operation } \cdot \text{ siehe Beweis von 1.8}).$$

Wähle $V \in \mathcal{U}_e(X)$ mit

$$(2) \quad zV \subset Wz.$$

Sei $a \in A$. Nach (1) gibt es $w \in W$ mit $a = q_G(wz)$. Für $x := wz \in a$ gilt dann $xV = wzV \stackrel{(2)}{\subset} wWz = wWw^{-1}x \subset Ux$.

4.5 Satz

Sei X eine topologische Gruppe und $D < G < X$ neutrale Untergruppen von X . Ferner seien $\mathbb{L}/D$ und $\mathbb{R}/D$ inframetrisierbar.

Dann läßt sich jeder $\mathbb{L}/G \vee \mathbb{R}/G$ -Cauchyfilter $\mathcal{G}$ auf X/G bzgl. der kanonischen Abbildung $p: X/D \longrightarrow X/G$ zu einem $\mathbb{L}/D \vee \mathbb{R}/D$ -Cauchyfilter $\mathcal{F}$ auf X/D liften; insbesondere ist $\mathbb{L}/G \vee \mathbb{R}/G$ vollständig, falls $\mathbb{L}/D \vee \mathbb{R}/D$ vollständig ist.

Bemerkungen

(a) Dieser Satz verallgemeinert die Vollständigkeitsaussagen über $\mathbb{L}/G \vee \mathbb{R}/G$ bei L.G. Brown (Theorem 2 in Verbindung mit Theorem 1 und Kor. 3, bzw. auch U.S., 11.34) und in U.S., 11.21:

Beide Sätze behandeln nur die Situation $G < X$, während hier die Situation $D < G < X$ betrachtet wird. Bei L.G. Brown ist außerdem vorauszusetzen, daß G Normalteiler ist, und in U.S., 11.21, wird für G die Existenz einer Gruppenvervollständigung gefordert.

Es sei noch angemerkt, daß der Satz von L.G. Brown nicht mit einer Liftingstechnik für Cauchyfilter, sondern über die Vererbbarkeit von 'topologisch vollständig' (in U.S. 'Čech-vollständig' genannt) bewiesen wurde (vgl. Bemerkung hinter Beweis von U.S., 11.34).

(b) Verzichtet man auf die Neutralität von G , so gilt Satz 4.5 nicht mehr, wie folgendes Beispiel von W. Roelcke zeigt:

Sei X eine metrisierbare topologische Gruppe, so daß $\mathcal{L}_X \vee \mathcal{R}_X$ vollständig, $\mathcal{L}_X \wedge \mathcal{R}_X$ aber unvollständig ist (s. U.S., 8.14(b) Example).

Dann ist auch $Y := X \times X$ eine metrisierbare topologische Gruppe, so daß $\mathcal{L}_Y \vee \mathcal{R}_Y$ vollständig ist. Der Quotient $(Y/\Delta, (\mathcal{L}_Y \vee \mathcal{R}_Y)/\Delta)$

(wobei $\Delta := \{(x, x) \in Y: x \in X\} < Y$) ist aber nicht vollständig, denn

gemäß einer (unveröffentlichten) neuen Version von U.S., 5.24, ist

$(\mathcal{L}_Y \vee \mathcal{R}_Y)/\Delta$ uniform äquivalent zu $\mathcal{L}_X \wedge \mathcal{R}_X$.

Beweis von 4.5

Da R_D mit $\mathcal{L}$ und $\mathcal{R}$ verträglich ist ($D < X$; 1.7) und $\mathcal{L}/D$ und $\mathcal{R}/D$ inframetrisierbar sind, gibt es eine Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{U}_e(X)$ mit

$$(1) \quad DU_{n+1} \subset U_n D \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (D < X),$$

so daß die Mengen $(q_D \times q_D)((U_n)_{\mathcal{L}}) \quad (n \in \mathbb{N})$ bzw. $(q_D \times q_D)((U_n)_{\mathcal{R}}) \quad (n \in \mathbb{N})$ eine Basis einer halbmetrisierbaren Uniformität $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{L}/D$ bzw. $\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{R}/D$ bilden, bzgl. welcher $\mathcal{L}/D$ bzw. $\mathcal{R}/D$ inframetrisierbar ist.

Die Voraussetzungen von Proposition 4.2 (mit $\mathcal{W} = \mathcal{L}/D$, $\mathcal{W} = \mathcal{R}/D$ und

$R := R_G/R_D$) sind erfüllt (U.S., 9.20; U.S., 4.10 Remark (2)). Damit läßt

sich $\mathcal{G}$ bzgl. p zu einem $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\tilde{f}$ auf X/D liften, so daß der zu $\tilde{f}$ gehörige minimale $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter f_0 zu einem $\mathcal{W}_0$ -Cauchyfilter $\tilde{g}$ verfeinert werden kann. Sind nun $f \supset \tilde{f}$ und $g \supset \tilde{g}$ feinere Ultrafilter, so ist f ein $\mathcal{L}/D$ -Cauchyfilter (mit $p(f) \supset \mathcal{G}$) und g ein $\mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter (s. S. 2, hinter Def. von 'inframetrizierbar').

Es soll nun gezeigt werden, daß f auch ein $\mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter (also insgesamt ein $\mathcal{L}/D \vee \mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter) ist:

Sei $U \in \mathcal{U}_e(X)$ gegeben; gesucht ist $E \subset X$ endlich mit $U \cdot q_D(E) \in f$ (f ist Ultrafilter). Da g ein $\mathcal{R}/D$ -Cauchyfilter ist, gibt es nach Lemma 4.4 eine Umgebung $V \in \mathcal{U}_e(X)$ und $A \in g$ mit

$$(2) \quad \forall a \in A \quad \exists x \in a: xV \subset Ux.$$

Da die Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ passend zur Inframetrizierbarkeit von $\mathcal{R}/D$ gewählt wurde (s.o.), gibt es $n \in \mathbb{N}$ und $E \subset X$ endlich mit

$$(3) \quad q_D(U_n) \subset q_D(VE).$$

Da $\mathcal{F}_0$ ein $\mathcal{V}_0$ -Cauchyfilter ist, gibt es $B \in \mathcal{F}_0$ ($\subset \mathcal{F}$) mit

$$(4) \quad B \subset b.q_D(U_{n+1}) \quad (b \in B) .$$

Sei nun $a \in A \wedge B$. Wähle $x \in a$ nach (2); es folgt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \ni B &\stackrel{(4)}{\subset} a.q_D(U_{n+1}) = q_D(xDU_{n+1}) \stackrel{(4)}{\subset} q_D(xU_n) \stackrel{(3)}{\subset} q_D(xVE) \subset \\ &\stackrel{(2)}{\subset} q_D(UxE) = U.q_D(xE) . \end{aligned}$$

Verwendete Symbole und Bezeichnungen

$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, \dots\}$
$\langle \mathcal{L} \rangle$	der von der Filterbasis $\mathcal{L}$ erzeugte Filter
$\mathcal{F} A$	der vom Filter $\mathcal{F}$ auf A induzierte Spurfilter
$f(\mathcal{F})$	$= \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$
liften	s. 2.6
Verbindungsabbildung	s. 2.6

Eigenschaften

(ASIN)	S. 1
(SIN)	S. 1
inframetrisierbar	S. 2
(B)	1.1
(B')	1.2
(VB1)	1.7
(VB2)	1.7
verträglich	1.7
neutral	1.7

Gruppen

e, e_X	neutrales Element der Gruppe X
0	neutrales Element einer additiven Gruppe
1	Einheitsmatrix
$GL(n, \mathbb{R})$	Gruppe der invertierbaren reellen $n \times n$ -Matrizen
$\text{Aut}(X)$	Gruppe der Automorphismen von X

$S(N)$	Gruppe der Permutationen von N
$X^{(T)}$	$= \{(x_t)_{t \in T} \in X^T : \{t \in T : x_t \neq e_X\} \text{ ist endlich}\}$
$X^{[T]}$	s. 2.11
$G < X$	G ist Untergruppe von X
R_G	$= \{(x, y) \in X \times X : y \in xG\}$
X/G	$= X/R_G = \{xG : x \in X\}$
q_G	Quotientenabbildung $X \longrightarrow X/G, x \longmapsto xG$
$x.t$	s. 1.8 Beweis
$U.A$	$= \{u.a : u \in U, a \in A\}$

Topologische und uniforme Räume

$\overline{A}, \overline{A}^X$	Abschluß von A in X
$\mathcal{T} A$	Einschränkung der Topologie $\mathcal{T}$ auf A
$\mathcal{W} A$	Einschränkung der Uniformität $\mathcal{W}$ auf A
$\mathcal{T}_{\mathcal{W}}$	die von der Uniformität $\mathcal{W}$ induzierte Topologie
$\mathcal{W} \wedge \mathcal{W}'$	Infimum der Uniformitäten $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$
$\mathcal{W} \vee \mathcal{W}'$	Supremum der Uniformitäten $\mathcal{W}$ und $\mathcal{W}'$
$\mathcal{W}/R$	Quotient der Uniformität $\mathcal{W}$ nach der Äquivalenzrelation R
$\mathcal{Z}_R$	die von der Äquivalenzrelation R erzeugte Uniformität, d.h. die Uniformität, die $\{R\}$ als Basis besitzt
Δ_X	$= \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$
M^{-1}	$= \{(y, x) : (x, y) \in M\}$
$M \circ N$	$= \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in N \text{ und } (z, y) \in M\}$
$M^0 = \Delta_X, M^{n+1} = M^n \circ M$	$(n \in \mathbb{N})$
$M(x)$	$= \{y : (x, y) \in M\}$
$M(A)$	$= \bigcup_{a \in A} M(a)$
$M(\mathcal{F})$	$= \{M(A) : A \in \mathcal{F}\}$

Topologische Gruppen

$\mathcal{U}_e, \mathcal{U}_e(X)$ e -Umgebungsfilter der topologischen Gruppe X

$\mathcal{L}, \mathcal{L}_X$ Linksuniformität der topologischen Gruppe X

$\mathcal{R}, \mathcal{R}_X$ Rechtsuniformität der topologischen Gruppe X

$U_{\mathcal{L}}$ $= \{(x, y) \in X \times X: y \in xU\}$

$U_{\mathcal{R}}$ $= \{(x, y) \in X \times X: y \in Ux\}$

$\mathcal{Q}, \mathcal{Q}(G), \mathcal{Q}_X(G), \mathcal{Q}_T(G)$ s. 2.1

$\mathcal{J}_G$ $= \mathcal{J}_{R_G}$ (die von der Äquivalenzrelation $R_G = \{(x, y): y \in xG\}$ erzeugte Uniformität)

$\mathcal{L}/G$ $= \mathcal{L}/R_G$

$\mathcal{R}/G$ $= \mathcal{R}/R_G$

$\mathcal{Q}/D$ $= \mathcal{Q}/R_D$

$G_n \leq X$ G ist neutrale Untergruppe von X (s. 1.7)

$G \overset{\text{top}}{\times}_0 H$ inneres topologisches semidirektes Produkt des Normalteilers G mit der Untergruppe H

$G \overset{\text{top}}{\times}_0 H$ äußeres topologisches semidirektes Produkt

Literaturverzeichnis

- Brown, L.G.: *Topologically Complete Groups*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 35, pp. 593-600, 1972.
- Engelking, R.: *General Topology*. Polish Scientific Publishers, Warszawa 1977.
- Geiler, V.A., Kenderov P.S.: *Completeness of a Factor Group*. Vestnik Mosk. Univ. Mat., vol. 26, no. 5, pp. 32-33, 1971.
- Kac, G.I.: *Isomorphic Maps of Topological Groups into Direct Products of Groups Satisfying the First Countability Axiom*. Uspekhi Matem. Nauk (N.S.) 8, no. 6 (58), pp. 107-113, 1953.
- Kholodovskii, V.E.: *Über die Vollständigkeit von Quotienten uniformer Räume*. Übersetzt aus Uspekhi Matem. Nauk, vol. 32, pp. 209-210, 1976.
- Roelcke, W., Dierolf, S.: *Uniform Structures on Topological Groups and their Quotients*. McGraw-Hill, New York 1981.
- Abkürzung: U.S.
- Wigner, D.: *Inverse Limits and the Completeness of Quotient Groups*. Michigan Math. J., vol. 22, pp. 165-170, 1975.

Lebenslauf

19. Oktober 1956	geboren in Augsburg Eltern: Gerhard Leischner, Diplomingenieur Klara Leischner, geb. Trebes, Apothekerin
1963 - 1967	Grundschule in München
1967 - 1976	Ludwigsgymnasium, München
Juni 1976	Abitur
1976 - 1977	Grundwehrdienst
1977 - 1983	Studium der Mathematik (Nebenfach: Informatik) an der Ludwig-Maximilians-Universität, München
Februar 1983	Diplom Betreuer: Prof. Dr. W. Roelcke
seit Mai 1983	wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut der Ludwig-Maximilians-Universität, München

